3. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik II

Sommersemester 2011

C. Hartmann, S. Winkelmann

Abgabe bis Mittwoch, 18. Mai, 14.00 Uhr

Aufgabe 1 (Newton's work, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Newtonsche dividierte Differenz $f[x_0, \dots, x_n]$ unabhängig von der Reihenfolge der Knoten $x_0, \dots, x_n$ ist.

Aufgabe 2 (Restglied, 5 Punkte)
Gegeben sei eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft

$$\left\| \frac{d^n f}{dx^n} \right\|_\infty < M^n, \quad 0 < M < \infty\,.$$

Es sei nun $p_n \in \mathbb{P}_n$ ein Interpolationspolynom zu $n+1$ beliebigen, paarweise verschiedenen Stützstellen im Intervall $[a,b]$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0\,.$$

Wie passt das zu den typischen Beobachtungen über das schlechter werdende Approximationsverhalten der Lagrange-Interpolanten für große n? Diskutieren Sie das Problem kurz am Beispiel der beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad g(x) = \exp(x) \qquad (-3 \le x \le 3)\,.$$

Aufgabe 3 (Matlab-Aufgabe, 6 Punkte)

1. Schreiben Sie ein Programm, das ein Interpolationspolynom für gegebene Knoten $x = (x_0, \dots, x_n) \subset I$, $I = [a,b]$ und Daten $f(x)$ an der Stelle $z \in I$ berechnet. Verwenden Sie dazu
   (a) die Methode von Newton (Horner-Schema);
   (b) das Schema von Aitken-Neville.
2. Betrachten Sie die Auswertung des Interpolationspolynoms von $f(x) = \exp(x)$ auf $I = [-1,1]$ an einer beliebig gewählten Stelle $x \in I$ und tragen Sie die Rechenlaufzeit gegen die Anzahl der Stützstellen auf.