5. Übung zur Vorlesung
Computerorientierte Mathematik II

Sommersemester 2011

C. Hartmann, S. Winkelmann

Abgabe bis Mittwoch, 1. Juni, 14.00 Uhr

Aufgabe 1 (Newton-Cotes-Formeln, 6 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass für die Gewichte λ_k der Newton-Cotes-Formeln gilt:
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$
2. Zeigen Sie, dass die Gewichte λ_k für alle $n \in \mathbf{N}$ symmetrisch sind, d.h., dass $\lambda_k = \lambda_{n-k}$ für alle $k = 0, 1, \ldots, n$ gilt.

Aufgabe 2 (Matlab-Aufgabe, 10 Punkte)

Implementieren Sie die summierten Newton-Cotes-Formeln $S_n^{(r)}$ als Matlab-Funktion `[S,A]=sumnc(ab,f,n,r)`. Dabei ist `ab` das Integrationsintervall, `f` die zu integrierende Funktion und `n` die Anzahl der Teilintervalle, auf denen die `r`-te Newton-Cotes-Formel ($1 \le \texttt{r} \le 3$) angewandt wird. Das Programm soll den Wert `S` der Quadraturformel und die Anzahl `A` der benötigten `f`-Auswertungen (Aufwand) zurückgeben. Werten Sie das Integral
$$I = \int_0^{\pi} \sin(x)dx$$
jeweils für $r = 1, 2, 3$ und $n = 6, 12, 18, 24, \ldots, 300$ aus und tragen Sie

1. den Fehler $|I - S_n^{(r)}|$ doppelt logarithmisch über n sowie
2. den Aufwand doppelt logarithmisch über den Fehler $|I - S_n^{(r)}|$ auf.

Wiederholen Sie das Ganze für
$$I = \int_0^{1} \left(\sqrt{x} + \sin(21\pi x)\right) dx$$
und $n = 6, 12, 18, 24, \ldots, 1200$. Kommentieren Sie die jeweiligen Ergebnisse vor dem Hintergrund der unterschiedlichen Ordnung der Verfahren, der Glattheit der Funktionen und der Kondition der Quadratur.