6. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik II

Sommersemester 2011

C. Hartmann, S. Winkelmann

Abgabe bis Mittwoch, 08. Juni, 14.00 Uhr

Aufgabe 1 (Adaptives Verfahren, 6 Punkte)
Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, deren Integral in den Grenzen a und b berechnet werden soll. Nehmen wir an, dass wir letzteres durch die summierte Trapezregel näherungsweise bereits berechnet haben, d.h.

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} I^1_{V_k}(f)\,.$$

Wir wollen nun versuchen, die Approximation auf folgende Art und Weise zu verbessern: Falls der lokale Quadraturfehler

$$\epsilon_k = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - I^1_{V_k}(f) \right|$$

größer als eine vorgegebene lokale Toleranz TOL ist, soll das Intervall halbiert und die Trapezregel auf beide Teilintervalle angewandt werden. Diesen Prozess wiederholt man so lange, bis alle ϵ_k kleiner als TOL sind.

a) Schreiben Sie einen Pseudocode, der das beschriebene adaptive Verfahren darstellt.

b) Der lokale Fehler ϵ_k ist im allgemeinen nicht bekannt. Wir können einen Schätzer $[\epsilon_k]$ für den lokalen Fehler konstruieren, indem wir auf jedem Teilintervall zusätzlich die Simpsonregel $I^2_{V_k}$ anwenden und einen lokalen Fehlerschätzer durch

$$[\epsilon_k] := \left| I^2_{V_k} - I^1_{V_k} \right|$$

definieren. Erklären Sie, in welchem Sinne $[\epsilon_k]$ ein lokaler Fehlerschätzer ist und berücksichtigen Sie die Änderung in dem Pseudocode aus a).

Bemerkung: Das hier eingeführte Verfahren hat den Nachteil, dass sich die *lokalen* Fehler für eine sehr feine Intervalleinteilung beliebig aufsummieren können. Das Ziel muss es daher sein, den *globalen* Fehler zu kontrollieren.

Aufgabe 2 (Variation der Konstanten I, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t) \qquad t > 0$$

mit $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \int_0^t f(s) e^{\lambda(t-s)}\, ds$$

mit einer beliebigen Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ haben.

Aufgabe 3 (Variation der Konstanten II, 4 Punkte)
Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$x'(t) = 2x(t) + 2te^{2t}, \quad x(0) = x_0 .$$

1. Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems für $x_0 = 1$ und plotten Sie diese auf dem Intervall $[0, 10]$.

2. Plotten Sie die Lösung der Differentialgleichung noch einmal für den gestörten Anfangswert $\tilde{x}_0 = 1.001$, ebenso den Fehler $|x(t) - \tilde{x}(t)|$. Was beobachten Sie? War dieses Ergebnis theoretisch zu erwarten?