7. Übung zur Vorlesung Computerorientierte Mathematik II

Sommersemester 2011

C. Hartmann, S. Winkelmann

Abgabe bis Mittwoch, 15. Juni, 14.00 Uhr

Aufgabe 1 (Anfangswertprobleme, 6 Punkte)
Zu einer gegebene Funktion $f\colon [0,\infty) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ werde eine Funktion $x\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $t \mapsto x(t)$ mit der Eigenschaft

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

gesucht. Bestimmen sie x für

- $f \equiv 0$,
- $f = \lambda x$ mit einem beliebigen $\lambda \in \mathbf{R}$,
- $f = \phi(t)$ für eine beschränkte und integrable Funktion ϕ.

Aufgabe 2 (Reaktionskinetik, 5 Punkte)
Wir betrachten zwei gleichzeitig ablaufende Reaktionen

$$A \to B \quad B \to A$$

zweier Gase in einem Behälter mit konstantem Volumen V. Immer, wenn zwei A-Teilchen zusammenstoßen, reagiert eines davon zu einem B-Teilchen, immer, wenn zwei B-Teilchen zusammenstoßen, reagiert eines davon zu einem A-Teilchen. Die Reaktionsrate sei $k(p,T)$, wobei wir den Druck p und die Temperatur T als konstant annehmen wollen. Ferner nehmen wir an dass die Teilchen zu jedem Zeitpunkt gleichmäßig in dem Behälter verteilt sind (Durchmischungshypothese).

1. Leiten Sie ein Anfangswertproblem her, das für gegebene Startwerte $\eta_A(0)$, $\eta_B(0)$ die Anzahl der A- und B-Teilchen, $\eta_A(t)$, $\eta_B(t)$, zum Zeitpunkt $t > 0$ beschreibt.

2. Gibt es *stationäre Zustände*, d.h. Anfangswerte, für die die Lösung konstant bleibt?

Hinweis: Machen Sie die Annahme, dass die Anzahl der Zusammenstöße zweier Teilchen vom Typ S in einem kleinen Zeitintervall Δt proportional zum Produkt der Anzahl η_S der Teilchen und der Länge des Zeitintervalls ist, d.h. #Zusammenstöße= $k(p,T)\eta_S(t)\Delta t$.

Aufgabe 3 (Impliziter Euler, 5 Punkte)
Es seien x_k und $\tilde{x}_k$ die mit dem impliziten Euler-Verfahren berechneten Näherungslösungen der Differentialgleichung

$$x'(t) = \lambda x(t)\,, \qquad 0 < t \leq T$$

für ein reelles $\lambda > 0$ und die Anfangswerte x_0 bzw. $\tilde{x}_0$. Zeigen Sie, dass unter der Schrittweitenbeschränkung $\tau < 1/\lambda$ folgende Abschätzung für die diskrete Kondition des impliziten Euler-Verfahrens gilt:

$$|x_k - \tilde{x}_k| \leq \exp\left(\frac{T\lambda}{1-\tau\lambda}\right)|x_0 - \tilde{x}_0|.$$