8. Übung zur Vorlesung
Computerorientierte Mathematik II

Sommersemester 2011

C. Hartmann, S. Winkelmann

Abgabe bis Mittwoch, 22. Juni, 14.00 Uhr

Aufgabe 1 (Reaktionskinetik reloaded, 6 Punkte)
Für einen gegebenen Startwert $\xi \in \mathbf{R}^2$, $\xi_1, \xi_2 \geq 0$ sei $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ die Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 - x_1\,, \quad x_1(0) = \xi_1 \\ x_2' &= x_1 - x_2\,, \quad x_2(0) = \xi_2\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung des AWP folgende Eigenschaften besitzt:

- Massenerhaltung: $x_1(t) + x_2(t) = \xi_1 + \xi_2$ für alle $t \geq 0$.
- Positivität: $x_1(t)$, $x_2(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$.
- Asymptotische Stabilität: $x_1(t)$, $x_2(t) \to (\xi_1 + \xi_2)/2$ für $t \to \infty$

Hinweis: Stellen Sie ein AWP für $z_\pm = x_1 \pm x_2$ auf und lösen Sie dieses.

Aufgabe 2 (Matlab-Aufgabe, 8 Punkte)
Gegeben sei die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators:

$$x'' + \omega^2 x = 0\,, \quad x(0) = 1\,,\ x'(0) = -1\,.$$

1. Berechnen sie die analytische Lösung des Anfangswertproblems.
2. Implementieren Sie das implizite und das explizite Euler-Verfahren für den harmonischen Oszillator als Matlabfunktion. Übergabeparameter sollen die Anfangswerte, die Schrittweite τ, die Anzahl der Zeitschritte N sowie $\omega \in]0, \infty[$ sein. (Dazu muss die DGL zunächst in ein System von Gleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden.)
3. Im Folgenden bezeichne y den Zustandsvektor des zur obigen Gleichung äquivalenten DGL-Systems (also z.B. $y = (x, x')$). Plotten Sie für beide Verfahren und $\omega \in \{1, 5\}$ den diskreten Phasenfluss

   $$\{y_0, y_1, \ldots, y_N\} \subset \mathbf{R}^2$$

   sowie das Phasenportrait der analytischen Lösung. Berechnen Sie die Lösung bis zum Zeitpunkt $T = 30$ für die Schrittweiten $\tau = 0.1$, $\tau = 0.01$ und $\tau = 0.001$. Erklären Sie ihre Beobachtungen.

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/CoMaII.php