Aufgabe 1 (Interpolation, 3+2 Punkte)
Folgende drei Werte einer unbekannten Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sind bekannt:

$$f(-2)=1\,,\quad f(0)=1\,,\quad f(1)=-2\,.$$

Gesucht ist das Interpolationspolynom $p_2\in\mathbb{P}_2$, das in den Punkten $x_k\in\{-2,0,1\}$ mit $f(x_k)$ übereinstimmt.

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom in der Newtonschen Darstellung. Geben Sie auch die Darstellung in der Monombasis an.

b) Sie erhalten nun zusätzlich die Information $f(2)=1$. Berechnen Sie die Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms $p_3\in\mathbb{P}_3$, das zusätzlich auch in diesem Punkt mit f übereinstimmt. Geben Sie auch dessen Darstellung in der Monombasis an.

Aufgabe 2 (Fehlersuche, 5 Punkte)
Das Integral $\int_\pi^{2\pi}\cos(x)\,dx$ soll mit der summierten Simpson-Regel mit $m=10$ Teilintervallen berechnet werden. Dazu steht ein MATLAB-Programm zur Verfügung, das jedoch Fehler enthält:

```
clear;

a=0;
b=pi;
m=10;
h=(b-a)/(m-1);
simp=0

for k=0:m-1
  zk=a+k*(b-a);
  simp=simp+h*(cos(zk)+2*cos(zk+h/2)+cos(zk+h))/6;
end

ergebnis=simp
```

$a=\pi$
$b=2\pi$
$h=\frac{b-a}{m}$

zk=a+k*h
cos(·)+4cos(·)+cos(·)

Unterstreichen Sie jede Zeile, die einen Fehler enthält und geben Sie in der rechten Spalte jeweils die korrigierte Fassung an (ohne Begründung). Gesucht werden ausschließlich Fehler im Algorithmus, keine MATLAB-Fehler. Für falsche Antworten werden keine Punkte abgezogen.

Aufgabe 3 (Quadratur, 2+3 Punkte)
Betrachten Sie für $\alpha\in]0,1[$ die Quadraturformel

$$Q^\alpha(f)=\lambda_0^\alpha f(-\alpha)+\lambda_1^\alpha f(\alpha)$$

zur Approximation von $I(f)=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

a) Berechnen Sie die Quadraturgewichte λ_i^α in Abhängigkeit von den Stützstellen $\pm\alpha$.

b) Die Quadraturformel Q^α ist für Polynome vom Grad 1 exakt. Geben Sie ein $\alpha\in]0,1[$ an, so dass die Quadraturformel sogar für alle Polynome vom Grad 2 exakt ist.

Aufgabe 4 (Anfangswertproblem, 2+3 Punkte)
Es soll die Lösung des bekannten Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t)\,, \quad & x(0) &= x_0 \\ y'(t) &= -x(t) & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

zu den Anfangwerten $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$ untersucht werden.

a) Zeigen Sie, dass für die exakte Lösung $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$ für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt.

b) Es sei (x_k, y_k), $k \in \mathbb{N}$ die mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $\tau > 0$ berechnete Lösung. Berechnen Sie $x_1^2 + y_1^2$. Gilt die Erhaltungseigenschaft aus a) weiterhin?

Aufgabe 5 (Variation der Konstanten: Resonanz, 3 Punkte)
Gegeben sei das inhomogene Anfangswertproblem

$$y'(x) = \lambda y(x) + \phi(x)\,, \quad y(x_0) = y_0\,.$$

Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, ϕ: $[0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig und $y_0 \in \mathbb{R}$ irgendein Anfangswert. Falls die Inhomogenität ϕ selber Lösung des homogenen Problems ist, d.h. $\phi' = \lambda\phi$, so spricht man vom Resonanzfall. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$y(x) = \exp(\lambda(x - x_0))y_0 + (x - x_0)\phi(x)$$

Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ist.

Aufgabe 6 (Multiple choice, 6 Punkte)
Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt; für jede falsch angekreuzte Aussage wird ein Punkt abgezogen. Sie können jedoch nicht weniger als 0 Punkte in dieser Aufgabe bekommen.

wahr	falsch	Aussage
	X	Das implizite Euler-Verfahren zur Approximation der Lösung von $x' = \lambda x$ ist für alle $\lambda > 0$ unbedingt stabil.
	X	Für beliebig oft differenzierbare Funktionen $f \in C^\infty[a, b]$ halbiert sich der Interpolationsfehler bei Verdopplung der Anzahl der Stützstellen.
X		Das explizite Euler-Verfahren zur Approximation der Lösung von $x' = \lambda x$ ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ konsistent mit der Ordnung $p = 1$.
	X	Der Interpolationsfehler der Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms ist immer kleiner als der der Lagrange-Darstellung.
X		Es sei $f \in C^\infty[a, b]$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $\|f^{(n)}\|_\infty \leq 5$. Dann geht der Interpolationsfehler mit wachsender Anzahl von Stützstellen gegen Null.
X		Der Fehler einer Newton-Cotes-Formel hängt von der Funktion ab, die integriert werden soll.

CoMa II : Klausur A, Aufgabe 1

<u>Gegeben:</u> Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Funktionswerten

$$f_k = f(x_k), \quad k = 0,1,2$$

<u>Gesucht:</u> Polynom $p_2(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c$

$$\text{mit } p_2(x_k) = f_k, \quad k = 1,2,3 \qquad (*)$$

a) Newton-Darstellung von p_2:

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= \underbrace{a_2}_{=c_2} x^2 + \underbrace{(a_1 - a_2 x_0 - a_2 x_1)}_{=c_1} x + \underbrace{a_0 - a_1 x_0 + a_2 x_0 x_1}_{=c_0} \qquad (**)$$

<u>Bestimmen der Koeffizienten a_i aus $(*)$</u>

(i) $p_2(x_0) = f_0 \Rightarrow a_0 = f_0$

(ii) $p_2(x_1) = f_1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$

(iii) $p_2(x_2) = f_2 \Rightarrow a_2 = \dfrac{f_2 - f_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

Einsetzen der Zahlenwerte in (**) liefert

$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -1$

$\Rightarrow p_2(x) = -x^2 - 2x + 1$ (Monomdarstellung)

b) Zusätzliche Stützstelle, Newton-Polynom

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Berechnung des zusätzlichen Koeffizienten a_3 (alle anderen a_i, $i = 0,1,2$ bleiben erhalten):

(iv) $p_3(x_3) = f_3 \Rightarrow a_3 = \dfrac{f_3 - p_2(x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$

in Zahlen: $a_3 = 1 \quad (p_2(2) = 7)$

$$\Rightarrow p_3(x) = x^3 - x^2(x_0 + x_1 + x_2) + x(x_1 x_2 + x_0 x_1 + x_0 x_2) - x_0 x_1 x_2 + p_2(x)$$
$$= x^3 - 4x + 1$$

CoMa II, Klausur A, Aufgabe 3

Quadraturformel: $Q(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k$

mit Gewichten $\lambda_k = \int_a^b L_k(x)\,dx$, $L_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$

Hier: $n=1$ und $Q_\alpha(f) = \lambda_0^\alpha f(-\alpha) + \lambda_1^\alpha f(\alpha)$!

a) Berechnung der Gewichte λ_i^α:

$$\lambda_0^\alpha = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 0}}^{1} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}\,dx \quad , x_0 = -\alpha,\ x_1 = \alpha$$

$$= \frac{4}{2\alpha}\int_{-1}^{1} (\alpha - x)\,dx$$

$$= 1$$

Wegen $L_1(x) = \frac{x+\alpha}{2\alpha}$ gilt $\lambda_1^\alpha = \lambda_0^\alpha$ (ungerader Term verschw.)

Damit haben wir die QF:

$$Q_\alpha(f) = f(-\alpha) + f(\alpha)$$

(exakt für alle Polynome vom Grad 1)

b) Exakte Integration von Polynomen vom Grad 2:

$$f(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{c_2}{3}x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_0 x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2c_2}{3} + 2c_0$$

Gesucht: $\alpha \in \,]0,1[$, so dass

$$f(-\alpha) + f(\alpha) \overset{!}{=} \frac{2c_2}{3} + 2c_0$$

$$f(\alpha) = c_2\alpha^2 + c_1\alpha + c_0 \Rightarrow f(-\alpha) + f(\alpha) = 2c_2\alpha^2 + 2c_0$$

Gleichheit, wenn $\frac{2c_2}{3} + 2c_0 = 2c_2\alpha^2 + 2c_0$,

d.h. $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \in \,]0,1[$

CoMa II, Klausur A, Aufgabe 4 \1

ODE: $x' = y,\ y' = -x,\ x(0) = 0,\ y(0) = 1$

a) Lösungskurven liegen auf dem Einheitskreis

z.z. $x^2 + y^2 = 1 \quad \forall\, t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) = 2xx' + 2yy'$$

$$= 2xy - 2yx \quad \text{(Einsetzen der ODE)}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \text{const} \quad \forall\, t \geq 0$

Einsetzen der Anfangswerte liefert $x(0)^2 + y(0)^2 = 1$

b) Explizites Euler:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \left(I + \tau \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

Damit haben wir Bsp. für $(x_0, y_0) = (0, 1)$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + \tau^2 > \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1$$

D.h. numerische Lösgn. laufen spiralförmig nach außen,

keine Erhaltung der Norm.

CoMa II, Klausur A, Aufgabe 5

2 Wege führen zum Ziel, d.h. zur Lösung

1) Ableiten:

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda(x-x_0)} y_0 + (x-x_0)\phi'(x) + \phi(x)$$

$\phi' = \lambda\phi$

$$= \lambda \underbrace{\left(e^{\lambda(x-x_0)} y_0 + (x-x_0)\phi(x)\right)}_{y(x)} + \phi(x)$$

$$= \lambda y(x) + \phi(x)$$

Anfangsbedingung checken: $y(x_0) = e^0 y_0 + 0$

$= y_0$ — Voilà!

2) Variation der Konstanten:

$$\tilde{y}(x) = e^{\lambda(x-x_0)} y_0 + e^{\lambda x} \int_{x_0}^{x} e^{-\lambda s} \phi(s)\,ds$$

$$= e^{\lambda(x-x_0)} y_0 + e^{\lambda(x-x_0)} \phi(x_0) \int_{x_0}^{x} ds,$$

da $\phi' = \lambda\phi$, $\phi(x_0)$ fest $\Longrightarrow \phi(s) = e^{\lambda(s-x_0)}\phi(x_0)$.

Also: $\tilde{y}(x) = e^{\lambda(x-x_0)}(y_0 + \phi(x_0))(x-x_0)$

$$= e^{\lambda(x-x_0)} y_0 + (x-x_0)\phi(x)$$

$$= y(x).$$