Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, P. Gussmann

1. Übung zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2011

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php

Abgabe: 26. 04. 2011

1. Aufgabe (4 Punkte)
Stelle folgende Zahlen in der kartesischen Form $a + ib$ dar und berechne Beträge und Argumente

$$i^n, \qquad (\tfrac{-1-\sqrt{3}i}{2})^3, \qquad \tfrac{2-i}{2-3i} \quad \text{und} \quad \tfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Berechne Real- und Imaginärteil von $f(z) = z^3$ und $g(z) = \frac{1}{z}$. Zeichne Niveaulinienbilder.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Zeige: Die reellen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ bilden mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper, der zu $\mathbb{C}$ isomorph ist. (Bemerkung: Diese Matrizen sind gerade die Matrizen der Drehstreckungen in $\mathbb{R}^2$.)

4. Aufgabe (4 Punkte)
Wir nennen eine Abbildung $f\colon U \to V$ zwischen den offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{C}$ *biholomorph*, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} holomorphe Funktionen sind.
Zeige: Die Abbildung $f\colon U \to V$ ist genau dann biholomorph, wenn f holomorph und bijektiv, f^{-1} stetig und für alle $z \in U$ die Ableitung $f'(z) \neq 0$ ist. Insbesondere ist

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \qquad \text{mit } w = f(z).$$