Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, P. Gussmann

2. Übung zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2011

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php

Abgabe: 03.05.2011

1. Aufgabe (4 Punkte)
Zeige mittels der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen: Ist $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt $|f| \equiv konst$, dann ist bereits $f \equiv konst$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Zeige dass $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ holomorph ist und $f' = f$ erfüllt.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion und $f = g + ih$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Setze

$$\mathcal{J}_f^{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} f_z & f_{\bar{z}} \\ \bar{f}_z & \bar{f}_{\bar{z}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_f^{\mathbb{R}} := \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnen $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$ und $f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ die Wirtinger-Ableitungen und g_x, g_y, h_x und h_y die partiellen Ableitungen im reellen Sinne. Zeige: $\det \mathcal{J}_f^{\mathbb{C}} = \det \mathcal{J}_f^{\mathbb{R}}$. Folgere: Ist f holomorph, f' stetig und $f'(z_0) \neq 0$, so ist f eine biholomorphe Abbildung einer Umgebung U_1 von z_0 auf eine Umgebung V_1 von $f(z_0)$.
Hinweis: Benutze beispielsweise Aufgabe 4 von Blatt 1.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien r_1 und r_2 die Konvergenzradien von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. Zeige:

a) Ist $|a_k| \leq |b_k|$ für alle bis auf endlich viele k, dann ist $r_1 \geq r_2$.

b) Der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k$ ist $\geq \min(r_1, r_2)$, der von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$ ist $\geq r_1 r_2$.

Hinweis: Es darf benutzt werden, dass der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die größte Zahl r ist, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für alle z mit $|z| < r$ **absolut** konvergiert.