Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, P. Gussmann

4. Übung zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2011

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php

Abgabe: 17.05.2011

1. Aufgabe (4 Punkte)
Berechne mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel folgende Integrale:

$$\text{a)} \int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\,dz \qquad \text{b)} \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\,dz$$

$$\text{c)} \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)}\,dz \qquad \text{d)} \int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $\kappa = \partial D_1(0)$. Durch $z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\kappa \frac{1}{\zeta(\zeta - z)}\,d\zeta$ wird eine holomorphe Funktion f_1 auf $D = D_1(0)$, und auf $g = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ eine holomorphe Funktion f_2 definiert. Bestimme f_1 und f_2. In welchen Punkten $\zeta \in \partial D$ gilt

$$\lim_{z\to\zeta} f_1(z) = \frac{1}{\zeta} \quad \text{oder} \quad \lim_{z\to\zeta} f_2(z) = \frac{1}{\zeta} \quad ?$$

3. Aufgabe (4 Punkte)
Beweise den *Identitätssatz für Potenzreihen*, d. h. gegeben seien zwei Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^\infty b_k(z-z_0)^k$$

mit positiven Konvergenzradien R_1 bzw. R_2, und eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften

a) $0 < |z_n - z_0| < \min\{R_1, R_2\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und

c) $\sum_{k=0}^\infty a_k(z_n - z_0)^k = \sum_{k=0}^\infty b_k(z_n - z_0)^k$.

Dann ist $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d. h. die Potenzreihen stimmen überein.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeige für $0 \leq r < R$ die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Folgere daraus dass f konstant ist, falls $R = \infty$ und f beschränkt ist.