Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, P. Gussmann

5. Übung zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2011

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php

Abgabe: 24.05.2011

1. Aufgabe (4 Punkte)
Zeige, dass die reelle Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zwar C^∞, aber nicht analytisch ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien $a_1, \dots, a_k$ komplexe Zahlen $\neq 0$. Zeige:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_1^n + \ldots + a_k^n|} = \max_{j=1,\dots,k} |a_j|.$$

Hinweis: Entwickle $f(z) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{1-a_j z}$ um 0 in eine Taylorreihe und benutze die Hadamardsche Formel. Diese besagt dass der Konvergenzradius r einer Taylorreihe durch

$$\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

berechnet werden kann.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Zeige am Beispiel der Funktion $\sin z$, dass das Maximumprinzip nicht für unbeschränkte Gebiete gilt.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Konstruiere zwei auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktionen f und g derart, dass die Menge $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt besitzt, aber $f \neq g$ gilt. Weshalb widerspricht dies nicht dem Identitätssatz?