Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, P. Gussmann

6. Übung zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2011

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php

Abgabe: 31. 05. 2011

1. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimme die Nullstellen und deren Ordnungen der Funktionen

$$f_1(z) = (z^4 - 1)(1 - e^z), \qquad f_2(z) = \cos z^3, \qquad \text{und} \qquad f_3(z) = \sin z^3.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Zeige, dass in $\mathbb{C}$ alle Polynome in Linearfaktoren zerfallen, d.h. dass es zu jedem Polynom

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

Konstanten $c, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ gibt so dass

$$P(z) = c \prod_{i=1}^{n} (z - b_i).$$

Hinweis: Der Hauptsatz der Algebra, nach dem jedes Polynom über $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle hat, darf benutzt werden.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $D = D_r(0)$ die offene Kreisscheibe mit Radius $r > 0$, U ein Gebiet mit $\overline{D} \subset U$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Berechne

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(\zeta - b)}\, d\zeta$$

für $a, b \in D$ mit $a \neq b$, und benutze das Ergebnis, um einen Beweis des Satzes von Liouville zu geben.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $f(z) = z + e^z$. Zeige dass $\lim_{r\to\infty} |f(re^{it})| = \infty$ für jedes feste $t \in \mathbb{R}$.