Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, P. Gussmann

7. Übung zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2011

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php

Abgabe: 07.06.2011

0. Aufgabe (**Keine Pflichtaufgabe:** 4 Bonuspunkte)
Finde eine nullhomologe Kurve, die nicht nullhomotop ist. Dabei nennen wir eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to X$ mit $\gamma(a) = \gamma(b) = x_0 \in X$ *nullhomotop in* X, falls es eine stetige Abbildung $F\colon [0,1] \times [a,b] \to X$ mit $F(0,\cdot) = \gamma$, $F(1,\cdot) \equiv x_0$ und $F(\cdot,a) = F(\cdot,b) \equiv x_0$ gibt. Eine Skizze samt Begründung reicht aus. Ein formaler Beweis wäre natürlich noch besser.

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $R > 0$ und $f\colon D_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir setzen:

$$M(r) := \sup\{|f(z)| \;:\; |z| = r\}.$$

Zeige dass $M\colon [0,R) \to \mathbb{R}$ stetig und monoton ist. Zeige weiterhin, dass falls f nicht konstant ist, $M(r)$ sogar streng monoton ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Welche der folgenden Mengen ist einfach zusammenhängend (mit Beweis):

$$\mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{C} \setminus [0,1] \quad \text{und} \quad \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z = 0\}?$$

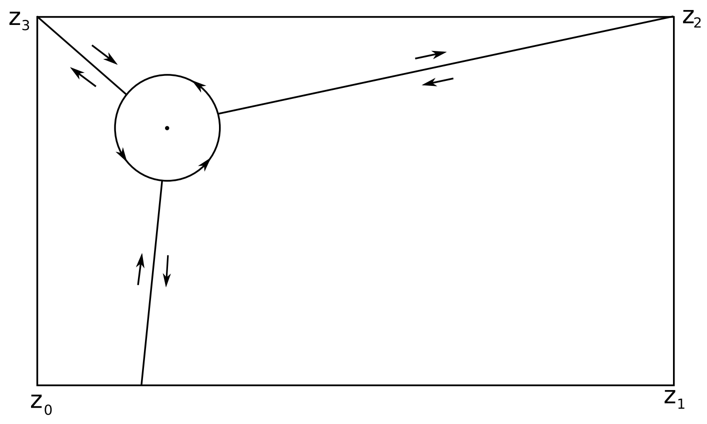
3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei Q ein offenes achsenparalleles Rechteck mit den Ecken $z_0, \dots, z_3$, und Γ sei der Zyklus

$$[z_0,z_1] + [z_1,z_2] + [z_2,z_3] + [z_3,z_0].$$

Zeige $n(\Gamma,z) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{Q}$ und $n(\Gamma,z) = 1$ für $z \in Q$.
Hinweis: Zeige für $z \in Q$ mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes für konvexe Gebiete

$$\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Dabei kann man sich etwa der in der Figur angedeuteten Hilfswege bedienen.



4. Aufgabe (4 Punkte)
Integriere die Funktion

$$f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}$$

mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes jeweils entlang der folgenden Integrationswege: