

8. Übung zur Vorlesung
FUNKTIONENTHEORIE

SS 2011

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php

Abgabe: 14. 06. 2011

1. Aufgabe (4 Punkte)

Welche der folgenden Gebiete sind einfach zusammenhängend?

- (a) $\mathbb{C} \setminus \left(\left\{ x + iy \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x} \right\} \cup \left\{ x + iy \mid x = 0, |y| \leq 1 \right\} \right)$
- (b) $\left\{ x + iy \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1 \right\} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x + iy \mid x = \frac{1}{n}, 0 < y \leq \frac{1}{2} \right\}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Berechne alle Logarithmen von i und $(1 + i)^3$, sowie den Hauptwert des Logarithmus (d.h. den Wert des Hauptzweiges) von $(3 - 4i)^4$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $f(z)$ der auf $\mathbb{C}^* \setminus \{z \mid \arg z = \frac{3}{4}\pi\}$ definierte Zweig des Logarithmus mit $f(1) = 0$. Entwickle f um -1 in eine Potenzreihe. Wo konvergiert diese? Wo stellt sie f dar?

4. Aufgabe (4 Punkte)

- a) Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und $z_0 \notin \text{Sp } \gamma$. Dann ist $t \mapsto z_0 + \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|}$ ein Integrationsweg $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\text{Sp } \alpha \subset \partial D_1(z_0)$. Zeige $n(\gamma, z_0) = n(\alpha, z_0)$.
- b) Es sei $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg mit $\text{Sp } \alpha \subset \partial D_1(z_0)$. Zeige, dass es eine stetige Abbildung $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\alpha(t) = z_0 + e^{i\varphi(t)}$ und drücke $n(\alpha, z_0)$ durch φ aus.