Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, P. Gussmann

9. Übung zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2011

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php

Abgabe: 21. 06. 2011

1. Aufgabe (4 Punkte)
Was stimmt hier nicht?

$$-4 = 4 \cdot (-1) = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{8}i = \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} = \sqrt{(-2) \cdot (-8)} = \sqrt{16} = 4$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Gebe möglichst große Gebiete an, auf denen

a) $\sqrt{\log z}$ b) $\log\left(1 + \sqrt[3]{z}\right)$ c) $\sqrt{z + \sqrt{z}}$

als holomorphe Funktionen erklärt werden können.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Betrachte $G := \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ und die auf G holomorphe und nullstellenfreie Funktion $h(z) = \frac{z-a}{z-b}$. Es ist $h(G) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Auf dieser Menge haben wir keine Wurzelfunktion. Sei hingegen $G^* := G \setminus [a, b]$, dann ist auf $h(G^*) \subset \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ z.B. der Hauptzweig des Logarithmus definiert, man kann also auf G^* Potenzen h^p bilden. Insbesondere hat man dort zwei Zweige der Quadratwurzel $\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$. Eine andere Möglichkeit besteht darin, aus G die beiden Strahlen $\{z = a + t()b - a \mid t < 0\}$ und $\{z = a + t()b - a \mid t > 1\}$ zu entfernen: Das Restgebiet G^{**} wird unter h in $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$ abgebildet, wo man abermals Zweige des Logarithmus und damit Wurzeln $\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$ hat.

a) Vergleiche die Zweige von $\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$ auf G^* mit denen auf G^{**}.

b) Es sei $f\colon \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{C}$ der Zweig von $\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$ mit $\operatorname{Re} f(i) > 0$. Bestimme $f(-i), f(2)$ und $f(-2)$.

c) Es sei $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $g \colon \mathbb{C} \setminus [-1,1] \to \mathbb{C}$ der (!) Zweig von $(z+1)^c(z-1)^{-c}$ mit $g(2) > 0$. Berechne für $0 < x < 1$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{g(x+i\varepsilon)}{g(x-i\varepsilon)}.$$

4. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimme das Konvergenzgebiet der folgenden Laurent-Reihen:

a) $\sum_{-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$

b) $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-1^n)}{3^n+1}$

c) $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+2}$

e) $\sum_{-\infty}^{\infty} 2^n (z+2)^n$.