

10. Übung zur Vorlesung  
FUNKTIONENTHEORIE

SS 2011

[http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS\\_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php](http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php)

**Abgabe: 28.06.2011**

**1. Aufgabe** (4 Punkte)

Berechne die Laurent-Reihen der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

- a)  $\frac{3}{(z+1)(z-2)}$  für  $1 < |z| < 2$ ,      b)  $\left(\frac{z-z_0}{z-a}\right)^2$  für  $|z-z_0| > |z-a|$ ,
- c)  $\frac{1}{z(z-3)^2}$  für  $1 < |z-1| < 2$ ,      d)  $\left(\frac{z}{z-1}\right)^k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  für  $|z| > 1$ .

**2. Aufgabe** (4 Punkte)

Bestimme für die folgenden Funktionen  $f$  und Punkte  $z_0$  die Art der Singularität von  $f$  in  $z_0$ . Gib bei hebbaren Singularitäten den Grenzwert von  $f$ , und im Falle eines Pols den Hauptteil an.

- a)  $\frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1}$  in  $z_0 = -i$ ,      b)  $\frac{\cos z - 1}{z^4}$  in  $z_0 = 0$ ,
- c)  $\tan z$  in  $z_0 = \frac{\pi}{2}$ ,      d)  $\sin \frac{\pi}{z^2 + 1}$  in  $z_0 = i$ .

**3. Aufgabe** (4 Punkte)

In einem Punkt  $z_0$  habe  $f$  einen Pol  $m$ -ter Ordnung,  $g$  einen Pol  $n$ -ter Ordnung und  $h$  eine Nullstelle  $p$ -ter Ordnung. Bestimme die Art der Singularität in  $z_0$  für die Funktionen

$$f + g, f + h, fg, fh, \frac{f}{g}, \frac{f}{h} \text{ und } \frac{h}{f}.$$

**4. Aufgabe** (4 Punkte)

Es sei  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Zeige, dass  $z_0$  kein Pol von  $e^f$  ist.