Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, P. Gussmann

11. Übung zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2011

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2011/Vorlesungen/Funktionentheorie.php

Abgabe: 05. 07. 2011

0. Aufgabe (**Keine Pflichtaufgabe:** 4 Bonuspunkte)
Betrachte die stereographische Projektion $\hat{\varphi}\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ der Sphäre $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ auf die Riemannsche Zahlensphäre $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gegeben durch

$$\hat{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{1-x_3}(x_1 + ix_2) & \text{wenn } x_3 \neq 1, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erklären wir die sphärische Distanz $\mathrm{d}(p_1, p_2)$ zweier Punkte $p_1, p_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ als euklidischen Abstand ihrer Urbilder $\hat{\varphi}^{-1}(p_1), \hat{\varphi}^{-1}(p_2) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, d.h. $\mathrm{d}(p_1, p_2) := \|\hat{\varphi}^{-1}(p_1) - \hat{\varphi}^{-1}(p_2)\|_2$. Zeige für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{d}(z, w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}, \qquad \mathrm{d}(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Bestimme die Abbildungen von S^2 auf sich, die unter der stereographischen Projektion der Multiplikation mit e^{it}, der Inversenbildung und der komplexen Konjugation entsprechen.

b) Beweise $\mathrm{d}(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}) = \mathrm{d}(z, w)$ für $z, w \in \mathbb{C}^*$.

c) Zeige, dass zwei Punkte $\xi, \eta \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ genau dann symmetrisch zum Nullpunkt liegen, wenn für die Bildpunkte z, w gilt $z\bar{w} = -1$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Berechne folgende Residuen:

a) $\operatorname{res}_0 \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$,

b) $\operatorname{res}_0 \dfrac{\sin 2z - 2\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$,

c) $\operatorname{res}_0 \dfrac{\tan z - z}{(1-\cos z)^2}$,

d) $\operatorname{res}_0 \dfrac{z-1}{\operatorname{Log}(z+1)}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei f holomorph in einer Umgebung von z_0, es gelte $f'(z_0) \neq 0$ und die Funktion g habe einen Pol erster Ordung in $w_0 = f(z_0)$. Drücke $\operatorname{res}_{z_0} f \circ g$ durch $\operatorname{res}_{w_0} g$ aus.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Berechne folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x + a^2}\,dx \quad$ für $a \in \mathbb{R}$,

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+bx^2)^n}\,dx \quad$ mit $a, b > 0, n \geq 1$.