Aufgabe 2

a)

In der Null hat z^{n-1} eine $n-1$ fache Nullstelle und $\sin^n z$ eine n-fache.

$\Rightarrow \frac{z^{n-1}}{\sin^n z}$ hat einen einfachen Pol

$$\Rightarrow \operatorname{res}_0 \frac{z^{n-1}}{\sin^n z} = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{z^{n-1}}{\sin^n z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^n}{\sin^n z} = \left(\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z}\right)^n$$

$$\overset{\text{del'Hospital}}{=} \left(\lim_{z\to 0} \frac{1}{\cos z}\right)^n = 1$$

b)

$\sin 2z - 2\sin z$ hat in 0 eine dreifache Nst, denn

$$\sin 2\cdot 0 - 2\sin 0 = 0$$
$$2\cos 2 0 - 2\cos 0 = 0$$
$$-4\sin 2 0 + 2\sin 0 = 0$$
$$-8\cos 2 0 + 2\cos 0 = -6 \neq 0 .$$

Analog hat $\sin z - z$ eine dreifache Nst und $\sin z$ eine einfache. Damit hat $\frac{\sin 2z - 2\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$ einen Pol erster Ordnung.

Also $\operatorname{res}_0 \frac{\sin 2z - 2\sin z}{\sin z(\sin z - z)} = \lim_{z\to 0}\left(z \cdot \frac{\sin 2z - 2\sin z}{\sin z(\sin z - z)}\right)$

$$= \lim_{z\to 0}\left(z \cdot \frac{2\sin z\cos z - 2\sin z}{\sin z\,(\sin z - z)}\right)$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{2z(\cos z - 1)}{\sin z - z}\right) \overset{\text{del'Hospital}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{2\cos z - 2 - 2z\sin z}{\cos z - 1}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z - 2\sin z - 2z\cos z}{-\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{4\cos z + 2\cos z - 2z\sin z}{\cos z}$$

$$= 6$$

c) Analog zu a) und b) könnten wir auch hier durch Ableiten zeigen, dass ein Pol erster Ordnung vorliegt und den Grenzwert per de l'Hospital berechnen. Statt dessen wollen wir die Reihenentwicklungen nutzen.

Es ist

$$\tan z = z + \frac{1}{3} z^3 + \dots$$

$$\Rightarrow \tan z - z = \frac{1}{3} z^3 + \dots = z^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \dots\right)$$

und

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \cos z - 1 = -\frac{1}{2} z^2 + \dots = z^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \dots\right)$$

Also ist

$$\frac{\tan z - z}{(\cos z - 1)^2} \overset{z \neq 0}{=} \frac{\left(\frac{1}{3} + \dots\right)}{z \cdot \left(-\frac{1}{2} + \dots\right)^2}$$

Es ist also

$$\operatorname{res}_0 \frac{\tan z - z}{(\cos z - 1)^2} = \lim_{z \to 0} \left(z \cdot \frac{\left(\frac{1}{3} + \dots\right)}{z \cdot \left(-\frac{1}{2} + \dots\right)^2} \right) = \frac{4}{3}$$

c) Der Zähler hat keine Nst, der Nenner schon.

$$\operatorname{Log}(0+1) = \operatorname{Log} 1 = 0$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log}(1) = 1 \neq 0.$$

Damit haben wir wieder einen Pol erster Ordnung, also:

$$\operatorname{res}_0 \frac{z-1}{\log z+1} = \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{z-1}{\log z+1} = \lim_{z \to 0} \frac{2z-1}{1/z+1} = -1$$

Aufgabe 4

a) $\int_0^{\pi/2} 1/_{1+\sin^2 x}\, dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 1/_{1+\sin^2 x}\, dx$

$= \frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z\cdot(1+(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))^2)}\, dz$

$= \frac{1}{-i} \int_{|z|=1} \frac{z}{z^4-6z^2+1}\, dz$

Gesucht sind die Residuen innerhalb von $B_1(0)$.
Dazu faktorisieren wir den Nenner

$z^4-6z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2 = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3\pm 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3\pm 2\sqrt{2}} = \cancel{\ldots} = \pm(1\pm\sqrt{2})$

Seien $z_1 = 1+\sqrt{2}$ $\quad z_2 = -1-\sqrt{2}$
$z_3 = 1-\sqrt{2}$ $\quad z_3 = -1+\sqrt{2}$.

$\int_0^{\pi/2} 1/_{1+\sin^2 x}\, dx = \frac{1}{-i} \int_{|z|=1} \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}\, dz$

$= -2\pi \left(\operatorname{res}_{z_3} \frac{z}{z^4-6z^2+1} + \operatorname{res}_{z_4} \frac{z}{z^4-6z^2+1} \right)$

Dabei ist

$\operatorname{res}_{z_3}\left(z/_{z^4-6z^2+1}\right) \overset{\text{Pol 1. Ord}}{=} \lim_{z\to z_3} \left((z-z_3) \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} \right)$

$= \frac{z_3}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)}$

Analog $\operatorname{res}_{z_4}\left(z/_{z^4-6z^2+1}\right) = \frac{z_4}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)}$

b) $$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx = \frac{1}{-4i}\int_{|z|=1} \frac{z-\frac{1}{z}}{z\left(1-2a\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+a^2\right)}\,dz$$

$$\overset{a\neq 0}{=} \frac{1}{+4ia}\int_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z\cdot\left(z^2-\frac{a^2+1}{a}z+1\right)}\,dz$$

$$= \frac{1}{4ai}\int_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z\cdot(z-a)(z-1/a)}\,dz$$

Damit die Stellen ~~a~~ a und 1/a nicht auf $\{|z|=1\}$ liegen müsste $|a|\neq 1$ gelten, ~~diesen~~ der Fall $a=\pm 1$ muss gesondert betrachtet werden.

Ansonsten ergibt sich (Residuen wie in a) berechnen):

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2a}\left(-1+\frac{a^2-1}{a\cdot(a-\frac{1}{a})}\right) & ,|a|<1 \\ \frac{\pi}{2a}\left(-1+\frac{\frac{1}{a^2}-1}{\frac{1}{a}(\frac{1}{a}-a)}\right) & ,|a|>1 \end{cases}$$

Für $a=0$ ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi}(1-\cos 2x)\,dx$$
$$= 2\pi$$

Für $a=\pm 1$ ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos^2 x}{2(1\mp\cos x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1\pm\cos x)\,dx = 2\pi$$

c) Da der Grad des Nenners um zwei größer ist als der Grad des Zählers, ist der Satz aus der Vorlesung anwendbar:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx$$

$$= \pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{res}_a \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}$$

Wir Faktorisieren den Nenner:

$$x^4+6x^2+13=0 \iff x^2=-3\pm 2i$$

Nebenrechnung

$$\iff x = \pm\left(\pm\frac{1}{b}+ib\right) \quad \text{mit} \quad b=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}$$

oder

Sei $z_1=\frac{1}{b}+ib$, $z_2=-\frac{1}{b}+ib$

$z_3=\frac{1}{b}-ib$, $z_4=-\frac{1}{b}-ib$, dann

ist

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,dx = \pi i\left(\frac{z_1^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{z_2^2}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}\right)$$

d) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a+bx^2)^n}\,dx = \frac{1}{b^n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{a}{b}+x^2\right)^n}\,dx = \frac{1}{b^n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\,i\right)^n\left(x+\sqrt{\frac{a}{b}}\,i\right)^n}\,dx$$

$$= \frac{2\pi i}{b^n}\operatorname{Res}_{\sqrt{\frac{a}{b}}\,i}\frac{1}{\left(\frac{a}{b}+x^2\right)^n}$$

Dies hat einen Pol n-ter Ordnung also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+bx^2)^n}\, dx = \frac{2\pi i}{b^n} \cdot \lim_{z\to\sqrt{\frac{a}{b}}\,i} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{\left(z-\sqrt{\frac{a}{b}}\,i\right)^n}{\left(z-\sqrt{\frac{a}{b}}\,i\right)^n \left(z+\sqrt{\frac{a}{b}}\,i\right)^n} \right)$$

$$= \frac{2\pi i}{b^n} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left. \left(\left(z+\sqrt{\frac{a}{b}}\,i\right)^{-n} \right) \right|_{z=\sqrt{\frac{a}{b}}\,i}$$

$$= \frac{2\pi i}{b^n} (-1)^{n-1} \cdot n! \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\,i\right)^{-2n+1}$$

$$= \frac{2\pi n!}{b^n} \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{-2n+1}$$