Freie Universität Berlin

FB Mathematik und Informatik

Funktionentheorie

Prof. Dr. Oliver Sander
Sommersemester 2011

Typeset und Layout: Sylvia Rockel

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

1.1 Einleitung

Hat die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung? Oder anders ausgedrückt: Existiert eine Zahl x,
so dass $x^2 = -1$ ist? Zumindest existiert keine reelle Lösung dieser Gleichung. Dies ist leicht zu sehen, da gilt
$$a^2 + 1 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$
Wir führen die Lösung "i" ein, ohne genau zu wissen, was das sein soll.
Man bildet zusammengesetzte Ausdrücke
$$a + ib \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \qquad (\text{"komplexe" Zahl})$$
und rechnet damit wie gewohnt, d. h.
$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$
und
$$\begin{aligned}(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) &= a_1a_2 + ib_1a_2 + a_1ib_2 + i^2b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i\,(a_1b_2 + a_2b_1)\end{aligned}$$
<u>Fragen:</u>

- Was ist denn jetzt dieses i genau?
- Kann man so rechnen, ohne auf Widersprüche zu stoßen?

Betrachte die Menge $\mathbb{R}^2$ der Paare (a, b) reeller Zahlen. Die bekannte Vektoraddition
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
macht aus $\mathbb{R}^2$ eine kommutative Gruppe.
Inspiriert von der obigen Betrachtung definiert man eine Multiplikation
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1),$$
welche assoziativ und kommutativ ist. Desweiteren existieren

<u>Einselemet:</u> $(1, 0)$, denn $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$

<u>Inverses Element:</u> $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, da $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \cdot (a, b) = (1, 0)$

und es gilt das Distributivgesetz
$$(a_1, b_1)\,[(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = (a_1, b_1)\,(a_2, b_2) + (a_1, b_1)\,(a_3, b_3).$$

Damit bildet der $\mathbb{R}^2$ mit der oben definierten Addition und Multiplikation ein Körper. Er heißt Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Wir können die reellen Zahlen mit den komplexen Zahlen der Form $(a,0)$ identifizieren, d. h. wir schreiben manchmal a statt $(a,0)$.
Jede komplexe Zahl (a,b) lässt sich damit darstellen als

$$(a,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + b \cdot (0,1)\,.$$

Die komplexe Zahl $(0,1)$ bezeichnen wir nun mit "i". Damit folgt

$$(a,b) = a + bi = a + ib.$$

Insbesondere gilt

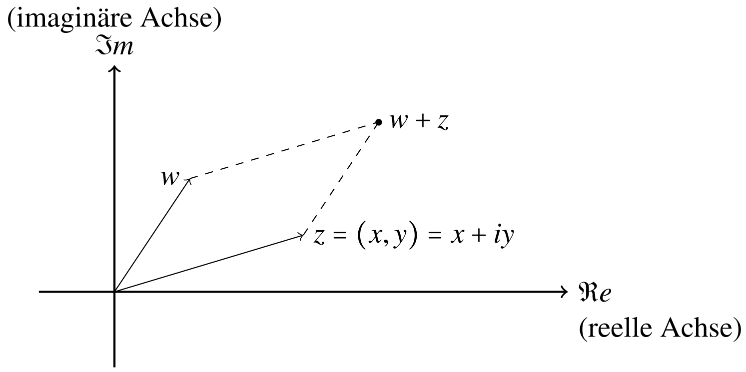
$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1.$$

Somit besitzt die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ über dem Körper $\mathbb{C}$ die Lösungen $x = i$ und $x = -i$.

Bezeichnungen
Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann bezeichenet

- $x = \Re e(z)$ den Realteil von z und
- $y = \Im m(z)$ den Imaginärteil von z.

Zur Veranschaualichung betrachten wir die komplexe/Gaußsche Zahlenebene



Definition 1.1 (Komplexe Konjugation)
Ordne jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ die Zahl $\bar{z} = x - iy$ zu. Dies enspricht einer Spiegelung an der reellen Achse. Es gilt:

$$\overline{w+z} = \overline{w} + \bar{z}, \qquad \overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \bar{z}.$$

Desweiteren hat man

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

sowie

$$\Re e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad \Im m(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})\,.$$

1.2 Betrag einer komplexen Zahl

Definition 1.2 (Betrag von z)
Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann ist der Betrag von z definiert durch

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dies enspricht dem euklidischen Abstrand von z zum Nullpunkt. Ist $z \in \mathbb{R}$, so erhält man den normalen reellen Betrag.

Satz 1.1
Seien z und w komplexe Zahlen. Dann gilt

(i) $|z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$

(ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

(iii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Beweis. (von (ii))
Ist $z + w = 0$, folgt (ii) aus (i). Sei also $z + w \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & 1 = \frac{z}{z+w} + \frac{w}{z+w} \\ \Rightarrow \quad & 1 = \Re e\left(\frac{z}{z+w}\right) + \Re e\left(\frac{w}{z+w}\right) \leq \left|\frac{z}{z+w}\right| + \left|\frac{w}{z+w}\right| = \frac{|z|}{|z+w|} + \frac{|w|}{|z+w|} \end{aligned}$$

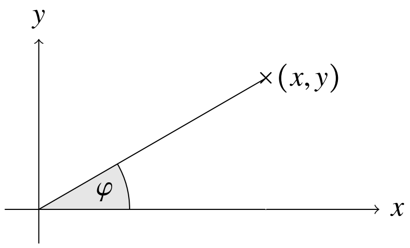
□

1.3 Polarkoordinaten

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ kann man Punkte (x, y) auch in der folgenden Form schreiben

$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ beschreibt φ einen Winkel zwischen dem positiven x-Achsenabschnitt und dem Strahl von $(0, 0)$ durch (x, y).



In der komplexen Ebene erhält man die Darstellung

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

dabei heißt φ das **Argument** von z: $\varphi = \arg(z)$. Dieses ist jedoch nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt und daher keine Funktion von z. Häufig verwendet man die Normierung durch eine Bedingung wie $0 \leq \varphi < 2\pi$ oder $-\pi < \varphi \leq \pi$.

1.4 Geometrische Interpretation der Multiplikation

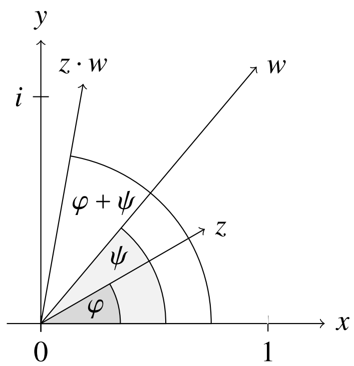
Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0,\ w \neq 0$ und Argumenten $\varphi = \arg(z),\ \psi = \arg(w)$. Dann ist die Multiplikation von z und w gegeben durch

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w| \cdot (\cos\varphi, i\sin\varphi)\,(\cos\psi, i\sin\psi) \\ &= |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))\,, \end{aligned}$$

da gilt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Man sieht, das sich die Beträge multiplizieren und die Argumente addieren.



Für festes $w \neq 0$ ist die Abbildung $z \mapsto w \cdot z$ eine Drehung um $\arg(w)$ verbunden mit einer Streckung um $|w|$, sie wird daher Drehstreckung genannt. Ist $|w| = 1$, so ist die Abbildung eine Rotation.

2 Komplexe Funktionen

Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wir betrachten jetzt Abbildungen/Funktionen $f\colon M \to \mathbb{C}$ und schreiben

$$z \mapsto f(z) \qquad \text{oder} \qquad w = f(z).$$

M kann insbesondere $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ sein.

Beispiele

(1) $f(z) = c$ $\to$ konstante Funktion

(2) $f(z) = z$ $\to$ Identität

(3) $f(z) = \bar{z}$ $\to$ Konjugation

(4) $f(z) = az, \quad a \neq 0$ $\to$ Drehstreckung

Funktionen werden wie üblich addiert, substrahiert, multipliziert und dividiert, z. B.

$$f, g\colon M \to \mathbb{C} \qquad (f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z).$$

Seien weiter $M, N \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon M \to N$, sowie $g\colon N \to \mathbb{C}$, dann ist die Komposition dieser Funktionen gegeben durch

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)).$$

Damit kann man weitere Beispiele konstruieren:

- Polynome: $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_\nu \in \mathbb{C}$
- rationale Funktionen: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, wobei p, q Polynome sind und $q(z) \neq 0$.

2.1 Veranschaulichung von Funktionen

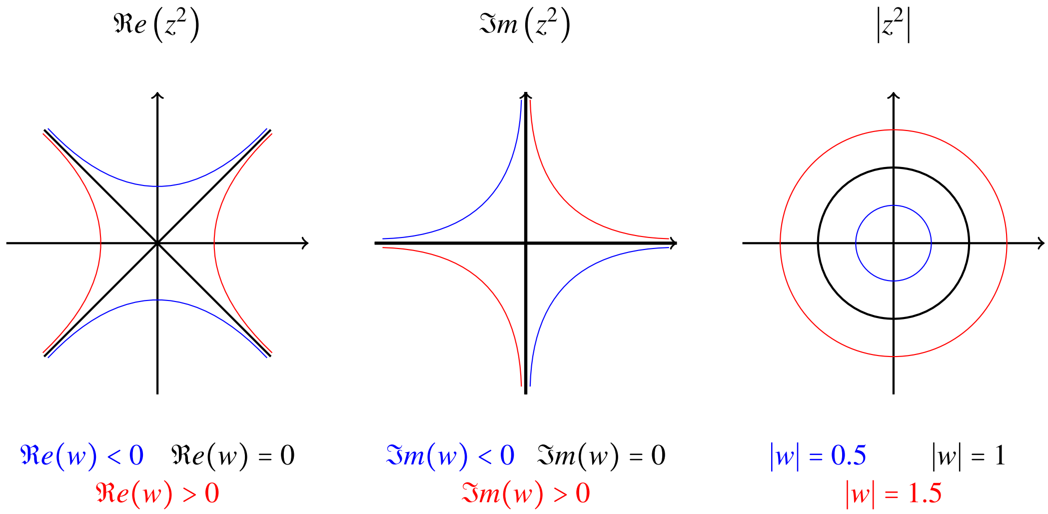
Der Graph einer Funktion $w = f(z)$ ist die Punktmenge

$$\left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w = f(z)\right\},$$

welche als Teilmenge von $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ schlecht vorstellbar und noch viel schlechter darstellbar ist. Man hat sich daher auf eine Kompromisslösung geeinigt, indem man nur die Niveaulinien von $\Re e\,(f(z))$, $\Im m\,(f(z))$ und dem Betrag $|f(z)|$ zeichnet, d. h.

$$\{z \mid \Re e\,(f(z)) = const.\}, \quad \{z \mid \Im m\,(f(z)) = const.\} \quad \text{und} \quad \{z\colon |f(z)| = const.\}$$

Beispiel 2.1
Sei $w = f(z) = z^2$ gegeben. Dann ist:



2.2 Stetigkeit

Definition 2.1 (Stetigkeit)
Sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ heißt stetig in einem Punkt $z_0 \in M$, falls

(i) es zu jeder Umgebung V von $w_0 = f(z_0)$ eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass gilt

$$f(U \cap M) \subset V.$$

(ii) es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in M \;\text{ mit }\; |z - z_0| > \delta.$$

(iii) für jede gegen z_0 konvergente Folge (z_ν) in M gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} f(z_\nu) = f\left(\lim_{\nu\to\infty} z_\nu\right) = f(z_0)\,.$$

2.3 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 2.2
Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in M$. Dann

(i) heißt f (komplex) differenzierbar in z_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'(z_0)$ oder $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ bezeichnet.

(ii) f heißt (komplex) differenzierbar, falls f für alle $z \in U$ differenzierbar ist. Eine solche Funktion f heißt **holomorph**.

Ist f auf M differenzierbar, so kann man die Funktion $z \mapsto f'(z)$ bilden. Diese heißt **Ableitung** f'.
Ist f' selbst wieder differenzierbar, so kann man auch die zweite Ableitung $f'' = f^{(2)}$ bilden, usw..

Beispiele

(1) Konstante Funktionen $f(z) \equiv c$ sind holomorph auf $\mathbb{C}$. Denn für jedes z_0 gilt

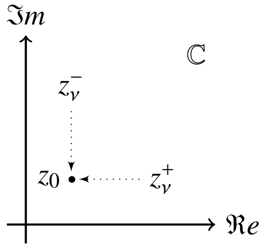
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{c - c}{z - z_0} = 0 \quad \Rightarrow \; f'(z) \equiv 0.$$

(2) Die Identitätsfunktion $f(z) = z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Denn für jedes z_0 gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1 \quad \Rightarrow \; f'(z) \equiv 1.$$

(3) Die Funktion $f(z) = \Re e(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$, d.h $z = x + iy$ und $\Re e(z) = x$ ist nirgends komplex differenzierbar.

Beweis. (von (3))
Sei (h_ν) eine reelle Folge mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} h_\nu = 0$. Wir konstruieren zwei komplexe Folgen



Betrachte zunächst die komplexe Folge (z_ν^+) mit $z_\nu^+ = z_0 + h_\nu$. Dann ist

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f(z_\nu^+) - f(z_0)}{z_\nu^+ - z_0} = \frac{\Re e(z_0 + h_\nu) - \Re e(z_0)}{z_0 + h_\nu - z_0} = \frac{h_\nu}{h_\nu} = 1.$$

Betrachte nun die komplexe Funktion (z_ν^-) mit $z_\nu^- = z_0 + ih_\nu$. Dann ist

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f(z_\nu^-) - f(z_0)}{z_\nu^- - z_0} = \frac{\Re e(z_0 + ih_\nu) - \Re e(z_0)}{z_0 + h_\nu - z_0} = 0.$$

Also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{\Re e(z) - \Re e(z_0)}{z - z_0}$ nicht und damit ist $f(z) = \Re e(z)$ nicht differenzierbar.

□

Bemerkung 2.1
Die Funktion $f(z) = \Re e(z)$ ist überall stetig, aber nirgends differenzierbar. Zwar gibt es dies im Reellen auch, jedoch ist es recht mühsam zu konstruieren. Holomorphie ist also eine recht restriktive Angelegenheit!

Die Folgende alternative Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit macht manchen Beweis einfacher.

Satz 2.1
Sei $M \subset \mathbb{C}$. Sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und z_0 ein Punkt in M. f ist genau dann in z_0 differenzierbar, wenn es eine in z_0 stetige Funktion $\Delta\colon M \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\Delta(z) \qquad \forall z \in M.$$

Dann gilt $\Delta(z_0) = f'(z_0)$.

Beweis.

"$\Rightarrow$": Setze $\Delta(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Dann ist

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\Delta(z) \qquad \forall z \neq z_0.$$

Da f komplex differenzierbar ist, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} \Delta(z)$ und ist gleich $f'(z_0)$. Mit $\Delta(z_0) = f'(z_0)$ ist Δ also stetig in z_0.

"$\Leftarrow$": Es existiere eine Funktion Δ mit den gewünschten Eigenschaften. Dann ist

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z_0) + (z - z_0)\,\Delta(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \Delta(z) = \Delta(z_0)\,.$$

Da Δ stetig ist, gilt nach Voraussetzung $\Delta(z_0) = f'(z_0)$.

□

Satz 2.2
Eine in einem Punkt z_0 komplex differenzierbare Funktion f ist dort auch stetig.

Beweis.
Nach **Satz 1.2** hat f die Darstellung

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\Delta(z),$$

wobei Δ in z_0 stetig ist. Daher ist auch f stetig in z_0.

□

Die folgenden Sätze gelten wie in der reellen Analysis und werden auch entsprechend bewiesen.

Satz 2.3
Sei $U \subset \mathbb{C}$. Seien $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ komplex differenzierbare Funktionen. Dann gilt

(i) $f + g$ ist in z_0 differenzierbar mit

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)\,.$$

(ii) $f \cdot g$ ist in z_0 differenzierbar mit

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0) \qquad \text{(Produktregel bzw. Leibniz-Regel).}$$

Satz 2.4 (Kettenregel)
Seien $U, V \subset \mathbb{C}$. Seien $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to \mathbb{C}$ Funktionen. Sei f in z_0 und g in $w_0 = f(z_0)$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ in z_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)' = g'(w_0) \cdot f'(z_0)\,.$$

Satz 2.5 (Quotientenregel)
Sei $U \subset \mathbb{C}$. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ in z_0 differenzierbar und $f(z_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{1}{f}$ in z_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}.$$

Beweis. (von **Satz 1.6**)
f ist inz_0 stetig und $f(z_0) \neq 0$. Also gibt es eine offene Umgebung V von z_0, auf der f nicht verschwindet. Für alle $z \in V$ gilt dann

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} = -\frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) \cdot f(z_0)}.$$

Da f differenzierbar ist, gibt es eine Funktion $\Delta\colon V \to \mathbb{C}$ und die Darstellung $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\Delta(z)$, d. h.

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} = -\frac{f(z_0) + (z - z_0)\,\Delta(z) - f(z_0)}{f(z) \cdot f(z_0)} = -\frac{\Delta(z)}{f(z) \cdot f(z_0)}\,(z - z_0)\,.$$

Es gilt also

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f(z_0)} + (z - z_0)\,E(z) \qquad \text{mit } E(z) = -\frac{\Delta(z)}{f(z) \cdot f(z_0)}.$$

Da E in z_0 stetig ist, ist $\frac{1}{f}$ in z_0 differenzierbar mit der Ableitung

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = E(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}$$

□

2.4 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Man kann Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ natürlich auch als Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ interpretieren. Die Differenzierbarkeit solcher Funktionen f ist aus der Analysis bekannt. Wir nennen sie zur Unterscheidung *reelle* Differenzierbarkeit.

(a) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist reell differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn es eine in x_0 stetige Funktion Δ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\Delta(x).$$

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $g\colon U \to \mathbb{R}$. g heißt in einem Punkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ reell differenzierbar, wenn es in z_0 stetige, reellwertige Funktionen Δ_1 und Δ_2 auf U gibt $(\Delta_1, \Delta_2\colon U \to \mathbb{R})$, so dass

$$g(z) = g(z_0) + (x - x_0)\,\Delta_1(z) + (y - y_0)\,\Delta_1(z).$$

Die Werte $\Delta_1(z_0)$ und $\Delta_2(z_0)$ sind die partiellen Ableitungen in Richtunh x bzw. y

$$\Delta_1(z_0) = g_x(z_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(z_0)\,, \qquad \Delta_2(z_0) = g_y(z_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(z_0)\,.$$

(c) **komplexwertige Funktionen**
Eine komplexwertige Funktion $f = g + ih\colon U \to \mathbb{C}$ ist reell differenzierbar, wenn g und h reell diefferenzierbar sind.

Die folgende Definition ist äquivalent zu (c).

Definition 2.3
Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ ist in z_0 reell differenzierbar, wenn es in z_0 stetige *komplexwertige* Funktionen $\Delta_1, \Delta_2\colon U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\,\Delta_1(z) + (y - y_0)\,\Delta_2(z). \qquad (*)$$

Die Werte

$$\Delta_1(z_0) = f_x(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \qquad \Delta_2(z_0) = f_y(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

heißen partielle Ableitungen von f nach x und y.

Beweis. (Äquivalenz)

"$\Rightarrow$": Sei $f = g + ih$ und g, h differnzierbar in z_0. Dann gibt es die Zerlegungen

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z_0) + (x - x_0)\,A_1(z) + (y - y_0)\,B_1(z) \\ h(z) &= h(z_0) + (x - x_0)\,A_2(z) + (y - y_0)\,B_2(z), \end{aligned}$$

wobei $A_1, A_2, B_1, B_2\colon U \to \mathbb{R}$ stetig in z_0 sind. Dann ist

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\underbrace{\left(A_1(z) + iA_2(z)\right)}_{:=\Delta_1(z)} + (y - y_0)\underbrace{\left(B_1(z) + iB_2(z)\right)}_{:=\Delta_2(z)}.$$

"$\Leftarrow$": Aus $(*)$ folgt

$$\begin{aligned} g(z) &= \Re e\left(f(z)\right) = \underbrace{\Re e\left(f(z_0)\right)}_{g(z_0)} + (x - x_0)\,\Re e\left(\Delta_1(z)\right) + (y - y_0)\,\Re e\left(\Delta_2(z)\right) \\ h(z) &= \Im m\left(f(z)\right) = \underbrace{\Im m\left(f(z_0)\right)}_{h(z_0)} + (x - x_0)\,\Im m\left(\Delta_1(z)\right) + (y - y_0)\,\Im m\left(\Delta_2(z)\right). \end{aligned}$$

Damit sind g und h differenzierbar.

$\square$

Man erkennt

$$\begin{aligned} f_x(z_0) &= \Delta_1(z_0) = \Re e\left(\Delta_1(z_0)\right) + i\,\Im m\left(\Delta_1(z_0)\right) = g_x(x_0) + ih_x(z_0) \\ f_y(z_0) &= \Delta_2(z_0) = \Re e\left(\Delta_2(z_0)\right) + i\,\Im m\left(\Delta_2(z_0)\right) = g_y(x_0) + ih_y(z_0). \end{aligned}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Es ist

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz liefert eine Formulierung ohne x und y.

Satz 2.6
Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ ist in z_0 genau dann reell differenzierbar, wenn es in z_0 stetige Funktionen A_1, A_2 gibt, so dass für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) A_1(z) + (\overline{z} - \overline{z_0}) A_2(z).$$

Dann ist

$$A_1(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right), \qquad A_2(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right).$$

Bemerkung 2.2
Lässt man den letzten Term weg, so erhält man *komplexe* Differenzierbarkeit.

Beweis. (von **Satz 1.7**)
Wir verwenden einfache Umformungen.

"$\Rightarrow$": Sei f in z_0 reell differenzierbar. Dann existiert die Zerlegungen

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z).$$

Aus

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}\left(z - z_0 + \overline{z} - \overline{z_0}\right), \qquad \text{und} \qquad y - y_0 = -\tfrac{i}{2}\left(z - z_0 - (\overline{z} - \overline{z_0})\right)$$

folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \tfrac{1}{2}\left(z - z_0 + \overline{z} - \overline{z_0}\right)\Delta_1(z) - \tfrac{i}{2}\left(z - z_{-}\left(\overline{z} - \overline{z_0}\right)\right)\Delta_2(z) \\ &= f(z_0) + (z - z_0)\left(\tfrac{1}{2}\Delta_1(z) - \tfrac{i}{2}\Delta_2(z)\right) + (\overline{z} - \overline{z_0})\left(\tfrac{1}{2}\Delta_1(z) + \tfrac{i}{2}\Delta_2(z)\right) \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Wir kehren das oben gezeigte um und erhalten damit:
Gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) A_1(z) + (\overline{z} - \overline{z_0}) A_2(z),$$

so setze

$$z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0), \qquad \text{und} \qquad \overline{z} - \overline{z_0} = x - x_0 - i(y - y_0).$$

Einsetzen liefert die gewünschte Formel

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\left(A_1(z) + A_2(z)\right) + (y - y_0)\, i\left(A_1(z) - A_2(z)\right).$$

□

Definition 2.4 (Wirtinger-Ableitungen)
Die Werte $A_1(z_0)$ und $A_2(z_0)$ heißen **Wirtinger-Ableitungen** von f. Man schreibt

$$A_1(z_0) = f_z(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \partial f(z_0), \qquad \text{und} \quad A_2(z_0) = f_{\overline{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \overline{\partial} f(z_0).$$

Es gilt also

$$f_z = \tfrac{1}{2}\left(f_x - i f_y\right), \qquad f_{\overline{z}} = \tfrac{1}{2}\left(f_x + i f_y\right), \qquad f_z = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}, \qquad f_{\overline{z}} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}.$$

Damit ist das Verhältnis von komplexer zu reeller Differenzierbarkeit klar.

Satz 2.7
Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn sie in z_0 reell differenzierbar ist und gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Beweis.

"⇒": Sei f in z_0 komplex differenzierbar. Dann existiert eine Zerlegung

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\Delta(z),$$

wobei Δ eine in z_0 stetige Funktion ist. Definiere jetzt $A_1 = \Delta$ und $A_2 \equiv 0$. Dann ist

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,A_1(z) + (\bar{z} - \overline{z_0})\,A_2(z),$$

also f in z_0 reell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = A_2(z_0) = 0$.

"⇐": Sei nun f in z_0 reell differenzierbar, d. h.

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,A_1(z) + (\bar{z} - \overline{z_0})\,A_2(z),$$

mit in z_0 stetigen Funktionen A_1 und A_2 und es gelte $A_2(z_0) = 0$.
Definiere

$$\hat{\Delta}(z) = \begin{cases} A_2(z)\frac{\bar{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

$\hat{\Delta}$ ist in z_0 stetig, denn es ist

$$\lim_{z \to z_0} \left|\hat{\Delta}\right| = \lim_{z \to z_0} |A_2(z)| \underbrace{\left|\frac{\bar{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}\right|}_{=1} = 0,$$

da A_2 stetig und $A_2(z_0) = 0$. Desweiteren ist f in z_0 komplex differenzierbar, da

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)\,A_1(z) + (\bar{z} - \overline{z_0})\,A_2(z) \\ &= f(z_0) + (z - z_0)\,A_1(z) + \underbrace{\frac{\bar{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}A_2(z)}_{=\hat{\Delta}(z)}\,(z - z_0) \\ &= f(z_0) + (z - z_0)\underbrace{\left[A_1(z) + \hat{\Delta}(z)\right]}_{=\Delta} \end{aligned}$$

und $\Delta = A_1 + \hat{\Delta}$ stetig in z_0.

□

Die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

heißt **System der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.**

Umformulierungen:

(a) mit partiellen Ableitungen

$$f_x + if_y = 0$$

(b) mit $f = g + ih$

$$0 = f_x + if_y = (g + ih)_x + i(g + ih)_y = \left(g_x - h_y\right) + \left(h_x + g_y\right) \qquad \Rightarrow \qquad g_x = h_y \text{ und } g_y = -h_x$$

Das so erhaltene System parieller Differentialgleichungen erster Ordnung gibt eine "reelle Sichtweise" auf die Theorie holomorpher Funktionen.

Ein Ergibnis der "reellen Sichtweise" liefert beispielsweise der folgende Satz.

Satz 2.8
Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$, wobei $f = g + ih$. f sei holomorph und zwei mal differenzierbar. Dann sind die Koeffizientenfunktionen harmonisch, d. h.

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} = 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta h = h_{xx} + h_{yy} = 0.$$

(Δ heißt Laplace-Operator.)

Beweis. (für g)

$$\Delta g = (g_x)_x = \left(h_y\right)_x = (h_x)_y = \left(-g_y\right)_y = -g_{yy}.$$

□

3 Potenzreihen

Aus der reellen Analysis ist die Darstellung einer Funktion als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 bekannt:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \, x^j \qquad \text{mit } c_j \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.1
Zu jeder Reihe existiert ein $R \geq 0$ (möglicher Weise $R = \infty$), so dass die Reihe genau dann konvergiert, wenn $-R < x < R$ gilt.

Wie hängen nun F und R zusammen? Ein großes Mysterium!
Für Cauchy war dies die Motivation sich beim Studium der komplexen Gleichungen mit komplexer Analysis zu beschäftigen.
Wir betrachten im Folgenden Potenzreihen um 0, d. h. Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Beispiel 3.1
Betrachte die Funktionen

$$G(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{und} \qquad H(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

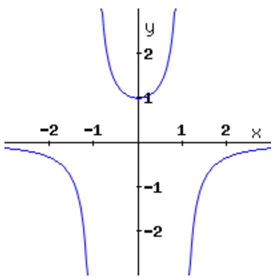
Bekanntermaßen gilt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j.$$

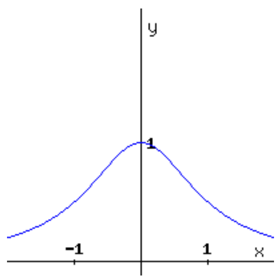
Diese Reihe konvergiert genau dann, wenn $-1 < x < 1$.
Daraus folgt

$$G(x) = \frac{1}{1-(x^2)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(x^2\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} x^{2j} \qquad \text{und} \qquad H(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \, x^{2j}.$$

Auch diese Reihen konvergieren genau dann, wenn $-1 < x < 1$ gilt. Aber warum ist das der Fall?



$G(x) = \frac{1}{1-x^2}$



$H(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Weitere Untersuchungen:

Entwicklung von G und H in Potenzreihen um $k \in \mathbb{R}$.

-> G hat den Konvergenzradius $R = \min\{|1-k|, |1+k|\}$.
Interpretation: $R =$ Abstand zur nächsten Singularität.

-> H hat den Konvergenzradius $R = \sqrt{1+k^2}$
Interpretation?
Im Reellen: **keine**.

Deshalb betrachten wir jetzt $G(z)$ und $H(z)$ als komplexe Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

$$G(z) = \frac{1}{1-z^2} \qquad \text{und} \qquad H(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

HIER FEHLEN PLOTS!!!

-> $\frac{1}{1-z^2}$ besitzt für $z \in \{-1, 1\}$ Singularitäten

-> $\frac{1}{1+z^2}$ besitzt für $z \in \{-i, i\}$ Singularitäten

Der reelle Konvergenzradius $R = \sqrt{1+k^2}$ ist genau der euklidische Abstand von $(k, 0)$ und $(0, \pm i)$.

Satz 3.2
Sei $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, z^j$ eine komplexe Potenzreihe. Dann existiert ein $R \geq 0$, so dass

(i) $P(a)$ konvergiert, wenn $|a| < R$,

(ii) $P(a)$ divergiert, wenn $|a| > R$.

Bemerkungen

(1) Über den Fall $|a| = R$ kann im Allgemeinen keine Aussage getroffen werden.

(2) Der Satz besagt nicht, dass R der Abstand vom Entwicklungspunkt zur nächsten Singularität ist.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zwei Hilfsresultate, die aus der reellen Analysis bekannt sind und analog bewiesen werden können:

(a) Absolute Konvergenz:
Die Reihe $P(z)$ konvergiert für einen Punkt a, falls $\widetilde{P}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left|c_j\, z^j\right|$ für a konvergiert.

(b) Cauchy-Kriterium:
P konvergiert für a, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n > m > N$ gilt

$$|P_n(a) - P_m(a)| < \varepsilon,$$

wobei P_n die n-te Partialsumme von P ist.

Beweis.

(i) Falls $P(z)$ für a konvergiert, dann konvergiert es auch für alle z mit $|z| < |a|$.

Da $P(a)$ konvergiert, muß $\lim_{n\to\infty} |c_n\, z^n| = 0$ gelten (notwendige Bedingung für absolute Konvergenz). Es existiert also eine reelle Zahl M mit $|c_n\, a^n| < M$ für alle $n \in N$. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |a|$. Dann ist $\varrho := \frac{|z|}{|a|} < 1$ und

$$|c_n\, z^n| = \left|c_n\, a^n \frac{z^n}{a^n}\right| = |c_n\, a^n| \cdot \varrho^n < M \cdot \varrho^n.$$

Zeige nun die absolute Konvergenz mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums:

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_n(z) - \widetilde{P}_m(z) &= \sum_{j=0}^{n} \left|c_j\, z^j\right| - \sum_{j=0}^{m} \left|c_j\, z^j\right| = \sum_{j=m+1}^{n} \left|c_j\, z^j\right| \\
&< M \sum_{j=m+1}^{n} \varrho^j = M \frac{1-\varrho}{1-\varrho} \sum_{j=m+1}^{n} \varrho^j \\
&= \frac{M}{1-\varrho} \left(\sum_{j=m+1}^{n} \varrho^j - \sum_{j=m+1}^{n} \varrho^{j+1} \right) = \frac{M}{1-\varrho} \left(\sum_{j=m+1}^{n} \varrho^j - \sum_{j=m+2}^{n+1} \varrho^j \right) \\
&= \frac{M}{1-\varrho} \left(\varrho^{m+1} - \varrho^{n+1} \right) \quad \to 0 \quad \text{für } n, m \to \infty.
\end{aligned}$$

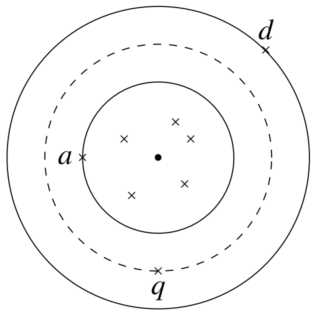
(ii) Falls $P(z)$ für d divergiert, dann divergiert es auch für alle z mit $|z| > |d|$.
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > |d|$. Dann folgt mit (i), dass $P(z)$ gegen d konvergiert. $\Rightarrow$ Widerspruch.

Beweisende:
Es existieren also $r_1 < r_2$, so dass $P(z)$ konvergiert, falls $|z| < r_1$ und divergiert, falls $|z| > r_2$. Die Situation für z mit $r_1 \leq |z| \leq r_2$ ist jedoch noch unklar. Daher wählen wir nun ein $q \in \mathbb{C}$ mit

$$|q| = \frac{|r_1| + |R_1|}{2}.$$

Falls $P(q)$ konvergiert, setze $r_2 = |q|$ und $R_1 = R_2$. Falls $P(q)$ divergiert so wähle $r_2 = r_1$ und $R = |q|$. Die Folgen $\left(r_j\right)$ und $\left(R_j\right)$ besitzen einen gemeinsamen Grenzwert. Dieser ist der Konvergenzradius R.

□



Bemerkung 3.1
Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt alles bisher gesagte auch für Reihen um z_0, d. h.

$$P_{z_0}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(z - z_0\right)^j .$$

Folgendes Ergebnis wird erst später bewiesen.

Satz 3.3
Sei $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(z - z_0\right)^j$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Sei $D_r\left(z_0\right)$ die offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r. Dann ist f auf $D_r\left(z_0\right)$ holomorph und die Ableitung ist

$$f'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} \left(z - z_0\right)^j .$$

4 Elementare Funktionen

4.1 Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion

Wir definieren die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen für komplexes Argument.
Was ist $\exp(z),\ z \in \mathbb{C},\ z \notin \mathbb{R}$?
Definition über Potenzreihen:
Im Reellen lautet die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j.$$

Bekanntlich konvergiert diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie konvergiert sogar absolut!
Betrachte nun die komplexe Reihe:

$$\exp(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j.$$

Diese Reihe konvergiert laut Satz 2.2 auf einem Kreis, wobei der Konvergenzkreis $\mathbb{R}$ enthält. Daher konvergiert die komplexe Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{C}$.
Wir schreiben auch e^z statt $\exp(z)$, interpretieren dies aber vorläufig nicht als Potenz.
Wegen Satz 2.3 ist $\exp(z)$ holomorph und die Ableitung erhält man durch gliedweises Differenzieren

$$(\exp(z))' = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j!} z^j \right)' = \exp(z).$$

Es gilt das Additionstheorem

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Insbesondere gilt

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1,$$

d. h. $\exp(z)$ hat auch im Komplexen keine Nullstellen.

Aus dem gleichen Grund konvergieren die Reihen

$$\sin(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} z^{2j}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ und sind dort holomorph. Sie setzen die reelle Sinus- und Cosinus-Funktion ins Komplexe fort.

4.1.1 Verhältnis von exp zu sin und cos

Im Komplexen besteht erstaunlicher Weise ein enger Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und Sinus/Cosinus.

$$\begin{aligned}
\exp(iz) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(iz)^j \\
&\overset{*}{=} \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{1}{j!}(iz)^j + \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{j!}(iz)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!}(iz)^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!}(iz)^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} z^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1} \\
&= \cos(z) + i\sin(z)
\end{aligned}$$

$*$: Erlaubt, da die Reihe absolut konvergiert.

Es ist zu beachten, dass $\cos(z)$ und $\sin(z)$ hier tatsächlich komlexe Zahlen sind und **nicht** $\Re e$ und $\Im m$ von $\exp(iz)$.

Die Exponentialfunktion lässt sich also als Summe der trigonometrischen Funktionen sin/cos darstellen.

Umgekehrt kann man die trigonometrischen Funktionen auch als Exponentialfunktion darstellen, denn es lässt sich analog zeigen, dass

$$\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z)$$

und damit

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

gilt. Diese Darstellungen heißen **Eulersche Formeln**. Mit den Eulerschen Formeln lassen sich z. B. trigonometrische Additionstheoreme auch im komplexen leicht beweisen. Zum Beispiel gilt

$$\cos(z+w) = \cos z \cos(w) - \sin(z)\sin(w).$$

4.1.2 Hyperbelfunktionen

Betrachte die komplexe Cosinusfunktion auf der imaginären Achse

$$\cos(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right) = \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ebenso gilt für die komplexe Sinusfunktion

$$\sin(ix) = \frac{1}{2i}\left(e^{-x} - e^{x}\right) = \frac{-1}{i}\sinh(x).$$

4.1.3 Veranschaulichung von exp

Sei $z = x + iy$. Dann erhält man eine Polarkoordinatendarstellung

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y)),$$

wobei $\cos(y) \in \mathbb{R}$ und $\sin(y) \in \mathbb{R}$. Also ist

$$|e^z| = \sqrt{(e^x)^2 \cdot \left(\cos^2(y) + \sin^2(y)\right)} = e^x = e^{\Re e(z)} \qquad \text{und} \qquad \arg\left(e^z\right) = y = \Im m(z).$$

Insbesondere folgt

$$e^{2\pi i} = 1 \qquad \text{und} \qquad e^{z+2\pi ik} = e^z.$$

Damit ist das Bild von e^z

(1) ein Kreis mit Radius e^x, falls x konstant,

(2) ein Strahl mit Winkel y, falls y konstant.

GRAPHIK FOLGT!!!
Jeder Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \Im m(z) < a+2\pi\}$ wird durch die Exponentialfunktion bijektiv auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ abgebildet.

5 Kurvenintegrale

Das Integral einer auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stückweise stetigen, komplexwertigen Funktion f ist gegeben durch

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \Re e\,(f(t))\ dt + i\int_a^b \Im m\,(f(t))\ dt.$$

Das Integral ist ein reeller, $\mathbb{C}$-linearer Operator, d. h.:
Für $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$ und stückweise stetige Funktionen $f, f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\ dt = c_1 \int_a^b f_1(t)\,dt + c_2 \int_a^b f_2(t)\,dt.$$

Ausserdem gilt

$$\int_a^b \overline{f(t)}\,dt = \overline{\int_a^b f(t)\,dt}.$$

Der Hauptsatz der Differentialrechnung gilt:
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig mit $F' = f$, so ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Desweiteren hat man folgende Substitutionsregel:
Sei φ eine reelle, monotone, stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion, die $[a,b]$ auf $[c,d]$ abbildet. Weiterhin sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig. Dann ist

$$\int_c^d g(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt = \int_a^b g\,(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\,ds.$$

Definition 5.1 (Weg / Integrationsweg)
Ein Weg in $U \subset \mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung γ eines abgeschlossenen Intervalls $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nach U.
Ist γ zusätzlich stückweise stetig differenzierbar, dann heißt γ Integrationsweg.

Graphik folgt!

Einige Eigenschaften und Bezeichnungen von γ:

(1) $\gamma(a),\ \gamma(b)$ heißen Anfangs- bzw. Endpunkt von γ.

(2) γ heißt **geschlossen**, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist.

(3) γ heißt **einfach geschlossen**, wenn γ geschlossen und auf $[a,b)$ injektiv ist.

(4) Die Bildmenge $\gamma([a,b])$ heißt Spur von γ (schreibe: $Sp(\gamma)$)
Häufig: gleiches Symbol

Definitionen

(1) **Positiv orientierte Kreislinie**
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Die Abbildung

$$K(r,z_0) : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z_0 + re^{it}$$

heißt positiv orientierte Kreislinie.

(2) **Der entgegengesetzte Weg γ^{-1}**
Zu einem Weg

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$$

definiere den entgegengesetzten Weg γ^{-1} durch

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t),$$

d. h. die Spur bleibt gleich und Anfangs- und Endpunkt von γ werden vertauscht.

(3) **Negativ ortientierte Kreislinie**
$K^{-1}(r,z_0)$ ist die negativ ortientierte Kreislinie. Es gilt

$$K^{-1}(t) = K(a+b-t) = K(2\pi - t) = z_0 + re^{i(2\pi-t)} = z_0 + re^{-it}.$$

<u>Merke:</u>
Die Anordnung des Parameterintervalls prägt der Spur des Weges einen Durchlaufsinn von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ auf. Beim Übergang von γ zu γ^{-1} kehrt sich die Richtung um.

Beispiel 5.1
Für $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ parametrisier

$$\gamma\,[0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0)$$

die Verbindungsstrecke von z_0 nach z_1. Schreibe auch $[z_0, z_1]$.

(4) **Zusammengesetzter Integrationsweg**
Seien $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ Integrationswege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Dann definieren wir den zusammengesetzten Weg $\gamma_1\gamma_2$ durch

$$\gamma_1\gamma_2 : [a, b + (d-c)] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t+c-b) & \text{für } t \in [b, b+d-c] \end{cases}.$$

Analoge Definition für Wege $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Beispiel 5.2
Sind Punkte $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gegeben, so definieren wir einen Integrationsweg $\gamma : [0,n] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = z_k + (t-k)(z_{k+1} - z_k), \quad \text{falls } t \in [k, k+1].$$

Wir schreiben auch $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$.

Definition 5.2 (Kurvenintegral)
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f : Sp(\gamma) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definiert man das Intergral von f durch

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt.$$

Das Integral ist wohldefiniert, da aus γ stückweise stetig differenzierbar folgt, dass $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ stückweise stetig ist.

Beispiele

(1) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Integriere die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ über $K(r, z_0)$.
Zur Erinnerung:

$$K(r, z_0) = z = z_0 + re^{it} \qquad \Rightarrow \qquad K'(r, z_0) = ire^{it} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Es gilt also

$$\int_{K(r,z_0)} \frac{1}{z-z_0}\ dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z_0} \cdot ire^{it}\ dt = \int_0^{2\pi} i\ dt = 2\pi i.$$

Bemerke, dass das Resultat nicht von r abhängt.
Alternative Schreibweisen:

$$\int_{K(r,z_0)} \ldots = \int_{|z-z_0|=r} \ldots = \int_{\partial D_r(z_0)} \ldots$$

(2) Sei $[a,b]$ ein reelles Intervall und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg mit $\gamma(t) = (t,0) - t$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt.$$

Dies ist eine sinnvolle Erweiterung des Integralbegriffes für Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.

(3) Integriere $f(z) = |z|$ über den Weg $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{i(\pi - t)}$:

$$\int_\gamma \underbrace{|z|}_{=1}\ dz = \int_0^\pi 1 \cdot \gamma'(t)\ dt = \gamma(\pi\} - \gamma(0) = 1 - (-1) = 2.$$

Intergriere die gleiche Funktion über die Strecke $[-1,1]$:

$$\int_{[-1,1]} |z|\ dz = \int_{-1}^{1} |t|\ dt = 1.$$

Im Allgemeinen sind Kurvenintegrale nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig.

5.1 Eigenschaften des Kurvenintegrals

Aus der Linearität des gewöhnlichen Integrals folgt die Linearität des Kurvenintegrals, d. h. es ist $\mathbb{C}$-linear:

$$\int_\gamma (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))\ dz = c_1 \int_\gamma f_1(z)\ dz + c_2 \int_\gamma f_2(z)\ dz.$$

Für reelle Integrale gilt die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \le (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Dies wollen wir jetzt für Kurvenintegrale verallgemeinern. Dazu benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 5.1
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\ dt.$$

Beweis.
Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$e^{is} \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b e^{is} f(t)\ dt$$

und daher

$$\Re e\left(e^{is} \int_a^b f(t)\ dt \right) = \int_a^b \Re e\left(e^{is} f(t) \right)\ dt \le \int_a^b \left| e^{is} f(t) \right|\ dt = \int_a^b |f(t)|\ dt.$$

Für $\int_a^b f(t)\ dt = 0$ ist nichts zu beweisen. Setze

$$s = -\arg \int_a^b f(t)\ dt, \qquad \text{falls} \int_a^b f(t)\ dt \neq 0.$$

Dann ist das mit e^{is} multiplizierte Integral reell und positiv

$$e^{is} \int_a^b f(t)\ dt = \left| \int_a^b f(t)\ dt \right|$$

und daraus folgt die Behaubtung.

□

Satz 5.1
Sei γ ein Integrationsweg mit Länge

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt$$

und sei f eine auf $Sp(\gamma)$ stetige Funktion. Dann gilt

$$\left| \int_\gamma f(z)\ dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in Sp(\gamma)} |f(z)|.$$

Beweis. Mit dem Hilfssatz erhält man

$$\left| \int_\gamma f(z)\ dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\ dt.$$

Sei $M := \max_{z \in Sp(\gamma)} |f(z)|$. Dann gilt

$$|f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq M \cdot |\gamma'(t)|$$

und es folgt

$$\int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\ dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt = M \cdot L(\gamma).$$

□

5.2 Die Invarianz des Kurvenintegrals unter Umparametrisierungen

Intuitiv würde man erwarten, dass ein Integral über einen Weg γ nur von $Sp(\gamma)$ abhängt. Jede Spur eines Weges γ kann aber auch durch einen anderen Weg $\widetilde{\gamma}$ erzeugt werden. Wie geht man nun mit dieser Mehrdeutigkeit um?

Definition 5.3 (Parametertransformation)
Seien I und J kompakte reelle Intervalle. Unter einer Parametertransformation von J auf I versteht man eine surjektive, stückweise stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : J \to I, \qquad \text{mit} \quad \varphi'(t) > 0 \quad \forall t.$$

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(1) Seien φ und ψ zwei Parametertransformationen, dann sind auch $\varphi \circ \psi$ und φ^{-1} Parametertransformationen.

(2) Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $\varphi : J \to I$ eine Parametertransformation. Dann ist auch

$$(\gamma \circ \varphi) : J \to \mathbb{C}$$

ein Integrationsweg. Man nennt dies eine Umparametrisierung von γ. Dabei ändert sich weder der Anfangs- oder Endpunkt, noch die Spur von γ.

Satz 5.2
Seien γ_1 und γ_2 Integrationswege in $\mathbb{C}$, wobei γ_2 eine Umparametrisierung von γ_1 ist. Dann gilt für jede auf $Sp(\gamma_1)$ stetige Funktion f

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Beweis. Seien $[a,b]$ und $[c,d]$ die Definitionsintervalle von γ_1 und γ_2 und gelte $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ für eine Parametertransformation φ. Dann erhält man durch Substitution $t = \varphi(s)$, $dt = \varphi'(s)\, ds$:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\, dz &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\, \gamma_1'(t)\, dt \\
&= \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(s)))\, \gamma_1'(\varphi(s))\, \varphi'(s)\, ds \\
&= \int_c^d f(\gamma_2(s)) \cdot (\gamma_1(\varphi(s)))'\, ds \\
&= \int_c^d f(\gamma_2(s))\, \gamma_2'(s)\, ds \\
&= \int_{\gamma_2} f(z)\, dz
\end{aligned}$$

□

Satz 5.3
Sei γ ein Integrationsweg und bezeichne γ^{-1} den entgegengesetzen Integrationsweg von γ. Dann gilt für jede auf $Sp(\gamma)$ stetige Funktion f

$$\int_\gamma f(z)\ dz = -\int_{\gamma^{-1}} f(z)\ dz.$$

Beweis. Sei $[a,b]$ der Definitionsbereich von γ und γ^{-1}. Per definitionem gilt

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$$

und damit

$$\left(\gamma^{-1}\right)'(t) = \gamma'(a+b-t) = -\gamma'(a+b-t).$$

Durch Substitution mit $s = a+b-t,\ ds = -1\ dt$ erhält man

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\ ds = -\int_b^a f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)\ dt = -\int_{\gamma^{-1}} f(z)\ dz$$

□

Satz 5.4 (Ohne Beweis)
Sei γ ein durch $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ zusammengesetzter Integrationsweg. Dann gilt für jede auf $Sp(\gamma)$ stetige Funktion f

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\ dz.$$

Später benötigen wir eine Verallgemeinerung des Kurvenintegralbegriffes, d. h.

(a) Intergrale über Systeme von Wegen. Diese könne beispielweise als Rand von Gebieten auftreten.

(b) Integrale für einen "mehrfach durchlaufenen" Weg.

Wir führen daher den Begriff der **Kette** ein:
Eine Kette ist ein System von Wegen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, von denen jeder eine "Vielfachheit" $\in \mathbb{Z}$ besitzt. Mathematisch lässt sich dies wie folgt formulieren:

Definition 5.4 (Kette)
Sei W die Menge aller Integrationswege in $U \subset \mathbb{C}$. Eine Kette in U ist eine Abbildung $\Gamma\colon W \to \mathbb{Z}$, mit $\Gamma(\gamma) \neq 0$ für nur endlich viele Wege γ.

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- Die Ketten in U bilden mit der üblichen Addition eine abelsche Gruppe.
- Identifiziert man einen Integrationsweg γ mit der Kette, die nur auf γ den Wert 1 und sonst den Wert 0 annimmt und bezeichnet diese Kette auch wieder mit γ. Dann ist jede Kette eine endliche Linearkombination von Integrationswegen

  $$\Gamma = \sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i, \qquad \text{mit } n_i \in \mathbb{Z}.$$

  Die Integrationswege bilden also eine Basis von U.
- Ketten werden koeffizientenweise addiert.

Definition 5.5
Sei Γ eine Kette und f stetig auf $Sp(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{K} Sp(\gamma_i)$. Dann definieren wir das Integral über Γ durch

$$\int_{\Gamma} f(z)\ dz = \sum_{i=1}^{K} n_i \int_{\gamma_i} f(z)\ dz.$$

Es gelten die üblichen Regeln für Integralkurven.

6 Stammfunktionen

Definition 6.1 ((lokale) Stammfunktion)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $F\colon U \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f, wenn F holomorph ist und $F' = f$ gilt.
Wir sagen f habe eine **lokale Stammfunktion** auf U, wenn es zu jedem Punkt von U eine Umgebung $V \subset U$ gibt, so dass $f_{|V}$ eine Stammfunktion besitzt.

Die Existenz einer Stammfunktion impliziert daher die einer lokalen Stammfunktion.
Die Berechnung eines Kurvenintegrals ist einfach, falls eine Stammfunktion existiert.

Satz 6.1 (Hauptsatz der Differentialrechnung für Kurvenintegrale)
Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig und F Stammfunktion von f. Sei γ ein Integrationsweg in U von z_0 nach z_1. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\ dz = F(z_1) - F(z_0)\,.$$

Bemerkung
Das Kurvenintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab und ist kurvenunabhängig.

Beweis. Sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ stückweise stetig differenzierbar. Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, so dass γ auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ stetig differenzierbar ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\ dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (F(\gamma(t)))'\ dt \\
&= \sum_{i=1}^n \left[F(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1}))\right] \\
&\overset{*}{=} F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) \\
&= F(z_1) - F(z_0)
\end{aligned}$$

$*$: Teleskopsumme

□

Korollar 6.1
Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig und besitze eine Stammfunktion. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in U, dass

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0.$$

Beweis. Sei f stetig und existiere eine Stammfunktion F. Da γ geschlossener Integrationsweg ist, gilt $z_0 = \gamma(a) = \gamma(b) = z_1$. Nach obigen Satz ist

$$\int_\gamma f(z)\ dz = F(z_1) - F(z_0) = 0.$$

□

Beispiele

(1) Die Funktion $f(z) = z^n$ hat die Stammfunktion

$$F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$

auf $\mathbb{C}$, falls $n \geq 0$, bzw. auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, falls $n < -1$.
Also folgt für jeden Integrationsweg von z_0 nach z_1

$$\int_\gamma z^n\ dz = \frac{1}{n+1}\left(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}\right).$$

(2) Für Polynome

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\ z^i$$

ist die Stammfunktion gegeben durch

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}\ z^{i+1}.$$

(3) In der letzten Vorlesung hatten wir gesehen, dass

$$\int_{\gamma_1} |z|\ dz = 2 \quad \text{aber} \quad \int_{\gamma_2} |z|\ dz = 1$$

ist. Also besitzt nicht jede stetige Funktion eine Stammfunktion.

(4) In der letzten Vorlesung wurde

$$\int_{K(r,0)} \frac{1}{z}\ dz = 2\pi i$$

ausgerechnet. $f(z) = \frac{1}{z}$ ist zwar auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorph, besitzt dort aber anscheinend keine Stammfunktion.

Es gilt folgende Umkehrung:

Satz 6.2
Es sei f auf dem Gebiet G stetig. Falls für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G

$$\int_{\gamma} f(z)\ dz = 0$$

gilt, dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Bemerkung 6.1
Dieses Ergebnis demonstriert eine klassische Technik der Funktionentheorie:
Was kann man aus Kurvenintegralen über die Funktion f folgern?
Oder sogar: Was kann man über G folgern?

Beweis. (Explizite Konstrukrion von F)
Sei a ein fester Punkt in G. Für jedes $z \in G$ wählen wir einen Integrationsweg $\gamma_z \in G$ von a nach z und setzen

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\ d\xi.$$

Zeige: F ist Stammfunktion von f, d. h. $F'(z_0) = f(z_0)$ für alle $z_0 \in G$.
Sei $z \in G$ nahe genug an z_0, so dass $[z_0, z] \subset G$. Dies ist möglich, da G offen ist. Dann ist

$$\gamma = \gamma_{z_0} [z_0, z] \gamma_z^{-1}$$

ein geschlossener Integrationsweg in G. Nach Voraussetzung gilt

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(\xi)\ d\xi = 0$$

und daher

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(\xi)\ d\xi + \int_{[z_0,z]} f(\xi)\ d\xi - \int_{\gamma_z} f(\xi)\ d\xi = 0.$$

Erinnerung
Nach **Satz 1.2** ist eine Funktion g in z_0 komplex differenzierbar, wenn

$$g(z) = g(z_0) + (z - z_0)\,\Delta(z)$$

gilt, wobei Δ stetig in z_0. Dann ist $g'(z_0) = \Delta(z_0)$.

Wir zeigen dies nun für F:

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{\gamma_z} f(\xi)\ d\xi - \int_{\gamma_{z_0}} f(\xi)\ d\xi \\ &= \int_{[z_0,z]} f(\xi)\ d\xi \\ &= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\ dt \\ &= (z - z_0) A(z) \end{aligned}$$

mit $A(z) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\ dt$. Daher gilt $A(z_0) = f(z_0)$, d. h. F ist Stammfunktion, falls $A(z_0)$ stetig in z_0 ist. Die Stetigkeit von A in z_0, folgt aus der Stetigkeit von f

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} |A(z) - A(z_0)| &= \lim_{z \to z_0} \left| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\ dt - \int_0^1 f(z_0)\ dt \right| \\ &\leq \lim_{z \to z_0} (1 - 0) \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)| = 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.2
F hängt nicht von der Wahl der γ_z ab. Denn sei $\widetilde{\gamma_z}$ ein anderer Weg von a nach z, so ist

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\ d\xi = \int_{\widetilde{\gamma_z}} f(\xi)\ d\xi,$$

da nähmlich $\gamma_z \widetilde{\gamma_z}^{-1}$ geschlossen ist und somit

$$\int_{\gamma_z \widetilde{\gamma_z}^{-1}} f(\xi)\ d\xi = \int_{\gamma_z} f(\xi)\ d\xi - \int_{\widetilde{\gamma_z}^{-1}} f(\xi)\ d\xi = 0.$$

ABER F hängt natürlich von der Wahl von a ab.

Ist das Gebiet G konvex, so genügt es Dreiecke statt geschlossene Wege zu betrachten.

Satz 6.3
Sei G ein konvexes Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt für jedes in G gelegene abgeschlossene Dreick Δ

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz = 0,$$

wobei $\partial\Delta = [z_0, z_1, z_2, z_0]$. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Wie oben, mit $\gamma_z = [a, z]$. Da G konvex ist, liegen alle solche γ_z in G, wenn $z \in G$.

□

Bemerkung 6.3
Wenn G nicht konvex ist, so hat man doch zumindest noch zu jedem Punkt $z \in G$ eine konvexe Umgebung in G, da G offen. Daher folgt in diesem Fall aus

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz = 0 \qquad \forall \Delta \subset G$$

immer noch die Existenz **lokaler Stammfunktionen**.

6.1 Gliedweise Differentiation von Potenzreihen

Mit den Kenntnissen über Stammfunktionen kann jetzt der folgende Satz bewiesen werden. Wir hatten ihn schon bei der Untersuchung der Exponentialfunktion verwendet:

Satz 6.4
Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ habe den Konvergenzkreis $D_R(z_0)$. Dann ist $P(z)$ in $D_R(z_0)$ holomorph und es gilt

$$P'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu (z - z_0)^{\nu-1}.$$

Für den Beweis benötigt man folgenden Hilfssatz, um zu verifizieren, dass die gliedweise differenzierte Reihe konvergiert

Hilfssatz 6.1
Die Reihe $Q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu (z - z_0)^{\nu-1}$ konvergiert mindestens im Konvergenzkreis $D_R(z_0)$ von $P(z)$.

Beweis. Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, z^\nu$ hat den Konvergenzradius 1 (Quotientenkriterium). Also ist die Folge $\nu\varrho^\nu$ für jedes $\varrho \in [0, 1)$ beschränkt. Sei nun $z_1 \in D_R(z_0)$, der Einfachheit halber sei $z_0 = 0$ und sei z_2 mit $0 < |z_2| < |z_1|$. Da $P(z)$ auf D_R konvergiert existiert eine Konstante M, so dass $|a_\nu\, z_1^\nu| \leq M$ für alle ν. Daraus folgt, dass

$$\left|\nu\, a_\nu z_2^{\nu-1}\right| = \frac{\nu}{|z_2|} \cdot \left|\frac{z_2}{z_1}\right|^\nu \cdot |a_\nu z_1^\nu| \leq \frac{M}{|z_2|} \cdot \underbrace{\nu \left|\frac{z_2}{z_1}\right|^\nu}_{=\nu\varrho^\nu} \leq M^*.$$

Sei z ein weiterer Punkt, der $|z| < z_2$ erfülle. Dann gilt

$$\left|\nu\, a_\nu z^{\nu-1}\right| = \left|\nu\, a_\nu z_2^{\nu-1}\right| \left|\frac{z}{z_2}\right|^{\nu-1} \leq M^* \left(\frac{|z|}{|z_2|}\right)^{\nu-1}.$$

Da $\frac{|z|}{|z_2|} < 1$ ist, kann das Majorantenkriterium mit der geometrischen Reihe angewandt werden. Es folgt

$$Q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu (z - z_0)^{\nu-1}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig auf $D_R(z_0)$.

□

Beweis. (von **Satz 5.4**)
Nach **Hilfssatz 5.1** hat $Q(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu \left(z - z_0\right)^{\nu-1}$ einen Konvergenzradius $R' \geq R$. Es bleibt zu zeigen, dass $Q(z)$ die Ableitung von $P(z)$ ist.
Sei γ ein geschlossener Integrationsweg in $D_{R'}(z_0)$. Dann gilt

$$\int_\gamma \left(z - z_0\right)^{\nu-1}\, dz = 0.$$

Weiterhin gilt

$$\int_\gamma Q(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu \left(z - z_0\right)^{\nu-1}\, dz.$$

Da die Potenzreihe $Q(z)$ gleichmäßig konvergiert, dürfen Integration und Summation vertauscht werden und es gilt

$$\int_\gamma Q(z)\, dz = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu \int_\gamma \left(z - z_0\right)^{\nu-1}\, dz = 0.$$

Nach **Satz 5.1** bestizt $Q(z)$ eine Stammfunktion. Diese kann man sogar explizit angeben, indem wir wie im Beweis von **Satz 5.1** vorgehen.

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}(z) &= \int_{[z_0,z]} Q(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{[z_0,z]} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu \left(\xi - z_0\right)^{\nu-1}\, d\xi \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu \int_{[z_0,z]} \left(\xi - z_0\right)^{\nu-1}\, d\xi \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, a_\nu \left[\frac{1}{\nu}\left(\xi - z_0\right)^{\nu}\right]_{z_0}^{z} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(z - z_0\right)^{\nu}.
\end{aligned}$$

Dann ist auch

$$P(z) = a_0 + \widetilde{Q}(z)$$

Stammfunktion von $Q(z)$, also $P'(z) = Q(z)$.

□

6.2 Der Cauchy'sche Integralsatz für konvexe Gebiete

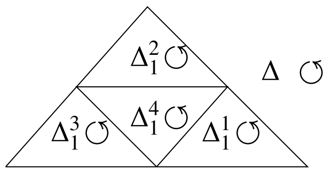
Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung für die Funktionentheorie.

Satz 6.5 (Satz von Goursat (1900))
Sei Δ ein geschlossenes Dreieck in $\mathbb{C}$. Dann gilt für jede in einer Umgebung von Δ holomorphe Funktion f

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz = 0.$$

Bemerkung 6.4
Bisher haben wir das Verhältnis betrachtet, falls das Integral 0 ist, so besitzt f eine Stammfunktion. Jetzt betrachten wir den Zusammenhang zwischen Integral ist 0 und der Holomorphie von f.

Beweis. Betrachte die Zerlegung von Δ in vier Teildreiecke Δ_1^1, Δ_1^2, Δ_3^1 und Δ_1^4 wie in der foglenden Abbildung, durch Verbinden der Seitenmitten von Δ.



Die Verbindungen der Seitenmitten tauchen jeweils zweimal als Rand eines Teildreiecks auf und zwar mit unterschiedlicher Richtung. Daher ist

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz\right| = \left|\sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^k} f(z)\ dz\right| \leq 4 \max_k \left|\int_{\partial\Delta_1^k} f(z)\ dz\right|.$$

Wähle das Teildreieck aus, auf dem der Betrag des Integrals maximal ist und nenne es Δ_1. Dann gilt

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\ dz\right|.$$

Wiederhole die Konstruktion von oben für Δ_1. Damit erhält man ein Teildreieck Δ_2 mit

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\ dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_2} f(z)\ dz\right|.$$

Fährt man nun so fort, so erhält man eine absteigende Folge von Dreiecken $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ mit

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\ dz\right|$$

und

$$L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta_{n-1}) = \ldots = 2^{-n} L(\partial\Delta).$$

Da alle Δ_n kompakt sind, gibt es einen Punkt $z_0 \in \Delta$, so dass

$$z_0 \in \bigcap_{n \geq 0} \Delta_n.$$

Wir versuchen $\left| \int\limits_{\partial \Delta_n} f(z)\; dz \right|$ abzuschätzen. Da f auf Δ, also insbesondere in z_0, differenzierbar ist, gibt es eine Zerlegung

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\left(f'(z_0) + A(z)\right),$$

wobei A stetig in z_0 und $A(z_0) = 0$ ist. Wegen der Differenzierbarkeit von f auf Δ, ist A stetig auf Δ. Da $f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)$ linear ist, existiert eine Stammfunktion und daher gilt

$$\int\limits_{\partial \Delta_n} f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)\; dz = 0.$$

Da $|z - z_0| < L(\partial \Delta_n) \quad \forall z \in \partial \Delta_n$ gilt die folgende Abschätzung

$$\left| \int\limits_{\partial \Delta_n} f(z)\; dz \right| = \left| \int\limits_{\partial \Delta_n} (z - z_0) A(z)\; dz \right| \leq L(\partial \Delta_n) \cdot \max_{z \in \partial \Delta_n} (|z - z_0| \cdot |A(z)|) \leq (L(\partial \Delta_n))^2 \cdot |A(z)|.$$

Kombination der Ergebnisse ergibt

$$\left| \int\limits_{\partial \Delta} f(z)\; dz \right| \leq 4^n \left| \int\limits_{\partial \Delta_n} f(z)\; dz \right| \leq 4^n \underbrace{(L(\partial \Delta_n))^2}_{=2^{-2n}(L(\partial \Delta))^2} \cdot \max_{z \in \partial \Delta_n} |A(z)| = \underbrace{(L(\partial \Delta))^2}_{\text{konstant}} \cdot \max_{z \in \Delta_n} |A(z)|.$$

Für $z \to z_0$ konvergiert $A(z)$, wegen der Stetigkeit von A, gegen $A(z_0) = 0$. Damit folgt

$$\left| \int\limits_{\partial \Delta} f(z)\; dz \right| = 0$$

□

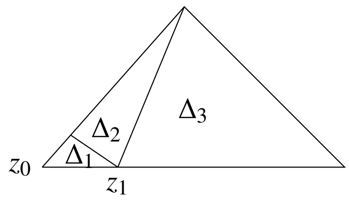
Im Folgenden werden wir die Voraussetzungen von **Satz 5.5** etwas abschwächen und so eine Verallgemeinerung formulieren.

Satz 6.6
Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in $\mathbb{C}$ und z_0 ein Punkt von Δ. Sei f in einer Umgebung von Δ mit eventueller Ausnahme eines Punktes z_0 holomorph und in z_0 stetig. Dann gilt

$$\int\limits_{\partial \Delta} f(z)\; dz = 0.$$

Beweis. Wir machen je nach Lage von z_0 eine Fallunterscheidung.

(a) Sei z_0 ein Eckpunkt von Δ. Dann unterteilen wir Δ wie folgt



Dabei ist darauf zu achten, dass die z_0 gegenüberliegende Seite von Δ_1 parallel zu der entsprechenden Seite in Δ sein muss. Es gilt

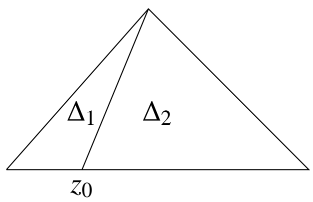
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\ dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\ dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)\ dz.$$

Nach dem **Satz von Goursat** verschwinden die Integrale über den Rand von Δ_2 und Δ_3, da f dort holomorph ist, und das Integral über den Rand von Δ_1 ist unabhängig von der Lage von z_1. Da f stetig auf Δ und Δ kompakt ist, nimmt $|f|$ auf Δ sein Maximum an. Es gilt

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\ dz\right| \leq L(\partial\Delta_1)\cdot\max_{z\in\Delta}|f(z)| \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{z_1\to z_0}\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\ dz\right| = 0.$$

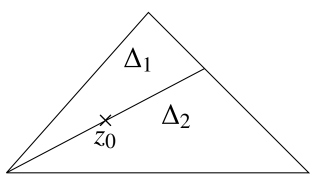
Daraus folgt die Behauptung.

(b) Sei nun z_0 auf einer Seite von Δ gelegen, aber kein Eckpunkt. Dann unterteile Δ wie folgt



Nun können wir (a) verwenden, womit die Behauptung folgt.

(c) z_0 liege im Inneren von Δ. Zerlege Δ wie unten gezeigt. Dann folgt mit (b) die Behauptung.



$\square$

Der folgende Satz erläutert das Verhältnis von Holomorphie und der Existenz einer Stammfunktion.

Satz 6.7
Sei G ein konvexes Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ stetig und mit Ausnahme eines Punktes holomorph. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Beweis. Wie oben gezeigt, gilt für jedes in G gelegene abgeschlossene Dreieck Δ

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\; dz = 0.$$

Nach **Satz 5.3** besitzt f dann auf G eine Stammfunktion.

□

Satz 6.8 (Cauchy'scher Integralsatz für konvexe Gebiete)
Sei G ein konvexes Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ stetig und mit eventueller Ausnahme eines Punktes holomorph. Dann gilt für jeden in G verlaufenden geschlossenen Integrationsweg γ

$$\int_{\gamma} f(z)\; dz = 0.$$

Beweis. Nach **Satz 5.7** besitzt f eine Stammfunktion auf G. Daher verschwindet das Integral nach **Satz 5.2**. Daraus folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 6.5
In der reellen Analysis haben Differenzierbarkeit und die Existenz von Stammfunktionen nicht viel miteinander zu tun. In der komplexen Analysis sind diese beiden Begriffe eng miteinander verknüpft.

6.3 Die Cauchy-Integralformeln

Aus dem Integralsatz folgt eine Integraldarstellung für holomorohe Funktionen.

Satz 6.9 (Cauchy-Integralformel)
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $D = D_r(z_0)$ eine offene, relativ kompakte Kreisscheibe in G, d. h. $\overline{D_r(z_0)}$ ist kompakt und liegt ganz in G. Dann gilt für jedes $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Beweis. Wir verwenden den Cauchy'schen Integralsatz mit dem Integrationsweg ∂D. Dafür sei $U = D_{r+\varepsilon}(z_0)$ eine konvexe Umgebung von D, die für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ganz in G enthalten sei. Seo z ein fester Punkt in D. Definiere die Hilfsfunktion

$$g\colon g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} & \text{für } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{für } \xi = z. \end{cases}.$$

Diese Funktion g ist auf U stetig. Für $\xi \neq z$ ist dies klar und für $\xi = z$ folgt die Stetigkeit aus der Holomorphie von f.
Nach **Satz 5.6** ist g auf $U \backslash \{z\}$ sogar holomorph.
Damit können wir den Cauchy'schen Integralsatz anwenden.

$$0 = \int_{\partial D} g(\xi)\ d\xi = \int_{\partial D} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\ d\xi = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi - f(z) \int_{\partial D} \frac{1}{\xi - z}\ d\xi.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\int_{\partial D} \frac{1}{\xi - z}\ d\xi = 2\pi i$ ist. Dafür benötigen wir folgenden Hilfssatz, für dessen Beweis wir auf ([FL] Kap. II Satz 4.3) verweisen.

Hilfssatz 6.2
Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein Integrationsweg in $\mathbb{C}$. Sei $f(\xi, z)$ f/ür jedes $\xi \in Sp(\gamma)$ nach z differenzierbar mit stetiger Ableitung $f_z(\xi, z)$. Dann ist

$$F(z) = \int_{\gamma} f(\xi, z)\ d\xi$$

holomorph und es gilt

$$F'(z) = \int_{\gamma} f_z(\xi, z)\ d\xi.$$

Wir definieren

$$H(z) = \int_{\partial D} \frac{1}{\xi - z}\ d\xi$$

nach **Hilfssatz 5.2** ist H holomorph in D und man erhält

$$H'(z) = \int_{\partial D} \frac{1}{(\xi - z)^2}\ d\xi.$$

Dieses Integral ist Null, da der Integrand $\frac{1}{(\xi - z)^2}$ als Funktion von ξ die Stammfunktion $\frac{-1}{\xi - z}$ besitzt. Also ist $H(z)$ auf D konstant und es ist

$$H(z) \equiv H(z_0) = \int_{\partial D} \frac{1}{\xi - z_0}\ d\xi = 2\pi i.$$

□

Die Cauchy'sche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi$$

besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Der Integrand ist nach z differenzierbar.
- Integration und Differentiation dürfen vertauscht werden ([FL] Kap. II §4).

Daher gilt für alle $z \in D$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi,$$

d. h. wir haben eine Darstellungsformel für f'. Desweiteren ist der Integrand holomorph in z und daher ist $f'(z)$ holomorph in D. Da jeder Punkt $z \in G$ in einem offenen Kreis relativ kompakt in G liegt, folgt der folgende Satz.

Satz 6.10
Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar. Jede ihrer Ableitungen ist wieder holomorph.

Beweis.
Wendet man die eben nachgewiesene Holomorphie von f' an, so erhält man, dass f'' holomorph ist, usw.

□

Dieses Resultat zeigt, wie sehr sich die reelle und komplexe Analysis unterscheiden. Durch n-fache Ableitung nach z erhält man

Satz 6.11
Ist f auf G holomorph und $D \subset G$ eine relativ kompakte Kreisscheibe, so gilt für alle $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi.$$

7 Potenzreihenentwicklung

Erinnerung
Satz 5.10 besagt, dass jede komplex differenzierbare Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist.

Im folgenden wird bewiesen werden, dass jede holomorphe Funktion analytisch ist, d. h. lokal in Potenzreihen entwickelbar. Dies ist ein Unterschied zur reellen Analysis, da sich dort nicht alle C^∞-Funktionen in Potenzreihen entwickeln lassen. Ein Beispiel dafür sind Funktionen mit kompaktem Träger. In der komplexen Analysis werden die Worte "holomoroph" und " analytisch" teilweise als Synonyme verwendet. (z. B. bei Werner)

Definition 7.1
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$. f heißt von einem Punkt $z_0 \in U$ in einer Potenzreihe entwickelbar, wenn es eine Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

gibt, die in einer Umgebung V von z_0 konvergiert und wenn

$$f(z) = P(z) \qquad \text{auf } V \text{ gilt.}$$

Nach **Satz 5.4** dürfen Potenzreihen gliedweise differenziert werden, woraus folgt, dass f in z_0 holomorph ist.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Kann man f um $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwickeln?
Wir machen eine explizite Konstruktion und nutzen dafür die Cauchy-Integralformel.

Sei $D_R(z_0)$ der größte offene Kreis, der noch in U liegt. Sei $r < R$ fest und K die positiv orientierte Kreislinie um z_0 mit Radius r. Die Cauchy-Integralformel gibt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \qquad \forall z\colon |z - z_0| < r.$$

Der Faktor $\frac{1}{\xi - z}$ im Integral heißt **Cauchy-Kern**.
Entwicklung des Cauchy-Kerns in eine geometrische Reihe um z_0:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} \cdot \frac{\frac{1}{\xi - z_0}}{\frac{1}{\xi - z_0}} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \cdot \frac{1}{\xi - z_0} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\xi - z_0} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\nu}{(\xi - z_0)^{\nu+1}},$$

wobei $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^\nu$ gleichmäßig konvergiert, da $\frac{z - z_0}{\xi - z_0} < 1$ ist.

Einsetzen des Ergebnisses in die Cauchy-Integralformel ergibt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}}\ (z - z_0)^\nu\right] d\xi.$$

Bemerkung 7.1

(a) Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^\nu}{(\xi-z_0)^{\nu+1}}$ konvergiert für festes z gleichmäßig auf K.

(b) f ist beschränkt auf K, da f holomorph, also insbesondere stetig ist, und K kompakt.

(c) Aus (a) und (b) folgt, dass die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{\nu+1}} \ (z-z_0)^\nu$ gleichmäßig konvergiert.

Wegen (c) dürfen Integration und Summation vertauscht werden, d. h.

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} \, d\xi \right] (z - z_0)^\nu .$$

Es gilt also für alle z mit $|z - z_0| < r$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

mit

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} \, d\xi.$$

Wir benutzen nun die Cauchy-Integralformel für die ν-te Ableitung:

$$f^{(\nu)}(z) = \frac{\nu!}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} \, d\xi.$$

Es folgt

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!},$$

d. h. alle a_ν sind unabhängig von r. Daher gilt in ganz $D_R(z_0)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu$$

und diese Reihe konvergier mindestens auf $D_R(z_0)$ gleichmäßig.

Die oben gezeigten Ergebnisse werden in folgendem Satz formuliert.

Satz 7.1
Eine auf U holomorphe Funktion f ist um jeden Punkt $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

entwickelbar, wobei die Koeffizienten a_ν durch f eindeutig bestimmt sind durch

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}.$$

Die Reihe konvergiert mindestens im größten Kreis $D_R(z_0)$, der noch in U enthalten ist.

Bemerkung 7.2
Die so gefundene Reihe heißt **Taylorreihe**.

Beweis. (Satz 6.1)
Den ersten und letzten Teil des Satzes haben wir bereits durch die explizite Konstruktion der Reihe bewiesen. Nun muss noch gezeigt werden, dass die Koeffizienten a_ν eindeutig durch f bestimmt sind. Seien a_ν beliebige Koeffizienten mit

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu .$$

Gliedweises differenzieren ergibt

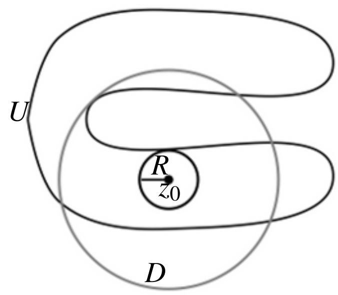
$$f^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} n!\, a_\nu (z - z_0)^{\nu - n} ,$$

d. h.

$$f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n .$$

□

Der Konvergenzradieus D von $P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu$ kann deutlich größer sein als $D_R(z_0)$. Allerdings hat man dann nicht unbedingt $P(z)\, 0 f(z)$ auf ganz $D \cap U$.



Die genaue Erklärung kommt, wenn man mehrwertige Funktionen betrachtet.

Satz 7.2
Sei $P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ eine in $D_R(z_0)$ konvergente Potenzreihe. Dann kann P um jeden Punkt $z_1 \in D_R(z_0)$ in eine Potenzreihe

$$Q(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z - z_1)^\nu$$

entwickelt werden. Der Konvergenzradius von Q ist mindestenz $R - |z_1 - z_0|$.

Bemerkung 7.3
Dieser Satz findet später seine Anwendung in der analytischen Fortsetzbarkeit. Allerdings kan man nicht in alle Richtungen gleichzeitig fortsetzen.

8 Der Identitätssatz

Der Identitätssatz ist ein wichtiges Hilfsmittel der Funktionentheorie. Er besagt, dass zwei holomorphe Funktionen, die auf einer kleinen Menge übereinstimmen, gleich sein müssen.

Definition 8.1 (Nullstelle)
Eine holomorphe Funktion f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung/Vielfachheit n, falls gilt

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Hat $f - w$ ub z_0 eine Nullstelle n-ter Ordnung, so nimmt f in z_0 den Wert w von der Ordnung n an.

Bemerkung 8.1
Die Funktion $f(z) \equiv 0$ hat in jedem Punkt eine Nullstelle der Ordnung ∞ und ist daher etwas Besonderes.

Satz 8.1 (Identitätssatz)
Sei f in einem Gebiet G holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f hat in G eine Nullstelle der Ordnung ∞.

(ii) Es gibt eine nicht diskrete Menge $N \subset G$ mit $f(z) = 0$ für alle $z \in N$.

(iii) Es gilt $f(z) \equiv 0$.

Erinnerung
Eine Menge $A \subset G$ heißt **diskret** in G, wenn jeder Punkt $z_0 \in G$ eine Umgebung $U(z_0)$ besizt, so dass $U(z_0) \cap A$ endlich ist.

Folgerung
Jede nicht konstante Funktion f nimmt auf jeder kompakten Teilmenge ihres Definitionsbereiches jeden Wert w nur an endlich vielen Stellen an. Sonst wäre die Nullstellenmenge von $f - w$ nicht diskret und somit, nach dem Identitätssatz, $f - w \equiv 0$.

Beweis. (von **Satz 7.1**)

(ii) $\Rightarrow$ (i):
Sei N eine nicht diskrete Menge in G und $f = 0$ auf N. Dann gibt es einen Punkt $z_0 \in G$ und eine Folge $\left(z_\mu\right)_{\mu \in \mathbb{N}}$ in N mit $z_\mu \to z_0$ und $z_\mu \neq z_0$. Zeige: f hat in z_0 eine Nullstelle der Vielfachheit ∞.

Beweis folgt mit vollständiger Induktion über die Vielfachheit:

I. A.: $f(z_0) = \lim\limits_{\mu \to \infty} f\left(z_\mu\right) = 0$

I. S.: Angenommen f habe in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n. In der Taylorentwicklung um z_0

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

seien nun

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0.$$

Also ist ein einer Umgebung von z_0

$$f(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \ldots$$

und für $z = z_\mu$ ist insbesondere

$$0 = f(z\mu) = a_n (z\mu - z_0)^n + a_{n+1} (z\mu - z_0)^{n+1} + \ldots .$$

Teilt man nun durch $\left(z_\mu - z_0\right)^n$, so erhält man

$$0 = a_n + a_{n+1}\left(z_\mu - z_0\right) + a_{n+2}\left(z_\mu - z_0\right)^2 + \ldots = a_n + \left(z_\mu - z_0\right) \underbrace{\left[a_{n+1} + a_{n+2}\left(z_\mu - z_0\right) + \ldots\right]}_{:=g(z_\mu)}.$$

g ist stetig in z_0, woraus folgt $g\left(z_\mu\right) \to a_{n+1}$ für $\mu \to \infty$. Daher ist $a_n = 0$ und f hat eine Nullstelle mit mindestens der Ordnung $n + 1$.

(i) $\Rightarrow$ (iii):
f habe in z_0 eine Nullstelle der Ordnung ∞, man folgere $f \equiv 0$ auf G.

Man betrachte die Menge

$$M = \left\{z \in G \mid f^{(\nu)}(z) = 0 \quad \forall \nu = 0, 1, 2, \ldots\right\}.$$

M ist in G relativ abgeschlossen, d. h. Schnitt einer abgeschlossenen Menge mit G.
Die Begründung liefert folgende Betrachtung:
Sei z_μ eine Folge in M mit $z_\mu \to z$. Da $f^{(\nu)}$ stetig ist, gilt $f^{(\nu)}\left(z_\mu\right) = \lim_{\mu \to \infty} f^{(\nu)}\left(z_\mu\right) = 0 \quad \forall \nu$. Ausserdem ist M nicht leer, da $z_0 \in M$. Also ist M relativ abgeschlossen in G.
Desweiteren ist M offen. Ist nämlich $z_1 \in M$, dann verschwinden in der Taylorreihe um z_1 alle Koeffizienten, woraus folgt, dass $f \equiv 0$ in einer Umgebung von z_1 ist. Daher sind aber auch alle Ableitungen von f Null in dieser Umgebung.
Da G zusammenhängend ist, muss $M = G$ sein, und damit $f \equiv 0$ auf G.

□

Beispiel 8.1 (Anwendung des Identitätssatzes)
$f(z) = \cot(\pi z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Auf $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ ist $\cot(\pi z)$ außerdem periodisch, d. h.

$$f(z) = g(z) := f(z+1) \qquad \text{auf } \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}.$$

Desweiteren ist $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ nicht diskret in $\mathbb{C}$.

Aufgrund dieser Eigenschaften ist

$$f(z) = g(z) \qquad \text{in } \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},$$

d. h. der komplexe Kotangens ist auf ganz $\mathbb{C}$ periodisch.

9 Die Cauchy-Ungleichung

Die Cauchy-Ungleichung ist eine einfache Konsequenz der Cauchy-Integralformel. Sie hat diverse interessante Anwendungen.

Satz 9.1 (Cauchy-Ungleichung)
Sei f in einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $D_r(z_0) = \{z: |z - z_0| \leq r\}$ holomorph. Dann gilt für jedes $0 < \delta \leq r$ im Kreis $\{z: |z - z_0| \leq r - \delta\}$ die Abschätzung

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{r}{\delta} \cdot \frac{n!}{\delta^n} \max_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|.$$

Beweis. Sei z, so dass $|z - z_0| < r$. Die Cauchy-Integralformel ergibt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi.$$

Gilt sogar $|z - z_0| \leq r - \delta$, dann ist $|\xi - z| \geq \delta$ auf $\partial D_r(z_0)$. Es folgt

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \cdot 2\pi r \cdot \max_{|\xi - z_0| = r} \left|\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\right| \leq n! r \max_{|\xi - z_0| = r} \left|\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\right|.$$

□

Folgerung
Setzt man $\varrho = r$, so erhält man eine Aussage zu z_0

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|\xi - z_0| = r} \left|\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\right|.$$

Daraus folgt wiederum, dass für die Koeffizienten a_ν der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

die folgende Abschätzung gilt

$$|a_n| = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \leq \frac{1}{r^n} \max_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|.$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung kann jetzt die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Differentiation allgemeiner bewiesen werden. Bisher wurde dies nur für Potenzreihen gezeigt.

Satz 9.2 (Weierstraß)
Die Folge (f_ν) holomorpher Funktionen konvergiere lokal gleichmäßig auf dem Gebiet G gegen eine Funktion f. Dann ist f holomorph und alle Ableitungen der f_ν konvergieren lokal gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von f.

Bemerkung 9.1
In der reellen Analysis gilt dies nicht.

Beweis. (von **Satz 8.2**)
Man zeige zunächst, dass f holomorph ist.

Da die f_ν stegig sind und lokal gleichmäßig gegen f konvergieren, ist f stetig. Sei nun γ der Rand eines Dreiecks in G. Dann gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz und der Holomorphie der f_ν

$$\int_\gamma f(z) = \int_\gamma \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(z)\, dz = \lim_{\nu\to\infty} \int_\gamma f_\nu(z)\, dz = 0.$$

Nach **Bemerkung 5.3** zu **Satz 5.3** gilt, dass Funktionen, deren Integrale über jeden Dreieckrand verschwinden, lokale Stammfunktionen besitzen. Daher besitzt f lokale Stammfunktionen. Damit und aus der Stetigkeit von f folgt, dass f holomorph ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die Ableitungen $f_\nu^{(n)}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(n)}$ konvergieren. Es genügt dies für den Fall $n = 1$ zu beweisen.

Erinnerung (lokale gleichmäßige Konvergenz)
Eine Funktionenfolge f_ν heißt lokal gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion f, falls es zu jedem Punkt z_0 eine Umgebung V gibt, auf der gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0: \quad |f_\nu(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in V,\ \forall \nu > \nu_0.$$

Sei $z_0 \in G$. Man konstruiere eine passende Umgebung $V(z_0) = D_r(z_0)$, wobei r so gewählt wird, dass $D_r(z_0)$ relativ kompakt in G liegt. Man wähle zusätzlich $\varepsilon > 0$. Anwendung der Cauchy-Ungleichung liefert

$$\left|f_\nu'(z) - f'(z)\right| \le \frac{r}{\delta^2} \max_{|\xi - z_0| = r} |f_\nu(\xi) - f(\xi)|$$

Man wähle $\delta = \frac{r}{2}$

$$\left|f_\nu'(z) - f'(z)\right| \le \frac{4}{r} \max_{|\xi - z_0| = r} |f_\nu(\xi) - f(\xi)|.$$

Da die f_ν lokal gleichmäßig gegen f konvergieren, existiert ein ν_0, so dass für alle $\nu \ge \nu_0$ gilt

$$\max_{|\xi - z_0| = r} |f_\nu(\xi) - f(\xi)| \le \frac{4}{r}\varepsilon.$$

Daher gilt

$$\left|f_\nu'(z) - f'(z)\right| \le \varepsilon.$$

□

Eine weitere wichtige Anwendung der Cauchy-Ungleichung sind Aussagen über den Wertebereich holomorpher Funktionen.

Satz 9.3
Die Funktion f sei in einer Umgebung von $\overline{D_r(z_0)}$ holomorph. Falls

$$|f(z_0)| < \min_{\partial D_r} |f(z)|,$$

so besitzt f in $D_r(z_0)$ eine Nullstelle.

Beweis. Falls $\min\limits_{\partial D_r} |f(z)| = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $\min\limits_{\partial D_r} |f(z)| > 0$ und f habe in $D_r(z_0)$ keine Nullstelle. Dann besitzt f auch in $\overline{D_r(z_0)}$ keine Nullstelle und die Funktion $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ ist in einer Umgebung von $\overline{D_r(z_0)}$ holomorph. Anwendung der Cauchy-Ungleichung für $n = 0$ und $\varrho = r$ ergibt

$$|g(z_0)| \leq \frac{0!}{r^0} \max_{\partial D_r} |g(z)|.$$

Daher gilt

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq \max_{\partial D_r} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min\limits_{\partial D_r} |f(z)|} \quad \Rightarrow |f(z_0)| \geq \min_{\partial D_r} |f(z)|.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der Annahme $\min\limits_{\partial D_r} |f(z)| > 0$. □

Eine weitere Aussage über den Wertebereich holomorpher Funktionen liefert der folgende Satz.

Erinnerung
Ein Gebiet ist eine offene und zusammenhängende Menge.

Satz 9.4 (Gebietstreue)
Sei f eine nicht konstante, holomorphe Funktion auf einem Gebiet G. Dann ist die Bildmenge $f(G)$ auch ein Gebiet.

Beweis. Da f stetig ist, ist $f(G)$ zusammenhängend. Es bleibt zu zeigen, dass $f(G)$ offen ist.
Sei $w_0 \in f(G)$ und $z_0 \in G$ mit $w_0 = f(z_0)$. Dann gibt es einen abgeschlossenen Kreis $\overline{D_r(z_0)}$ um z_0 mit $\overline{D_r(z_0)} \subset G$, so dass z_0 die einzige w_0-Stelle in $\overline{D_r(z_0)}$ ist.

Bemerkung 9.2
Wenn es einen solchen Kreis $\overline{D_r(z_0)}$ nicht gäbe, dann wäre die Menge aller w_0-Stellen nicht diskret in G. Daraus würde nach dem Identitätssatz folgen, dass $f \equiv w_0$ konstant wäre.

Da der Kreisrand ∂D_r kompakt ist, nimmt die stetige Funktion $|f(z) - w_0|$ auf diesem ihr Minimum an. Da das Minimum $\neq 0$ ist gilt für ein $\varepsilon > 0$

$$|f(z) - w_0| \geq 3\varepsilon > 0 \quad \text{für } |z - z_0| = r.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $D_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$ gilt. Man wähle dafür ein $w \in D_\varepsilon(w_0)$ und zeige, dass es ein $z_1 \in D_r(z_0)$ gibt mit $w \in f(z_1)$. Sei also $|w - w_0| < \varepsilon$. Dann gilt für alle z mit $|z - z_0| = r$

$$|f(z) - w| = |f(z) - w_0 + w_0 - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Andererseits gilt jedoch

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \varepsilon.$$

Da

$$|f(z_0) - w| < \min_{\partial D_r} |f(z) - w|,$$

kann man den Hilfssatz für $f(z) - w$ anwenden, welcher besagt, dass $f(z) - w$ mindestens eine Nullstelle in $D_r(z_0)$ besitzt.

□

Folgerung
Holomorphe Funktionen mit konstantem Real- oder Imagiärteil sind selbst konstant, da die Bildmenge nicht offen ist.

Eine weitere Folgerung ist das Maximumsprinzip, welches im folgenden Satz formuliert wird.

Satz 9.5 (Maximumsprinzip)

(i) Sei f eine auf einem Gebiet G holomorphe Funktion. Falls $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum besitzt, so ist f konstant in G.

(ii) Falls G beschränkt und f auf $\overline{G}$ stetig ist, dann nimmt $|f|$ das Maximum auf ∂G an:

$$f(z) \leq \max_{\xi \in \partial G} |f(\xi)| \quad \forall z \in \overline{G}.$$

Beweis.

(i) Sei $U \subset G$ eine Umgebung von z_0 mit $|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in U$. Dann ist $f(U) \subset \{w\colon |w| \leq |f(z_0)|\}$, d. h. keine Umgebung von $f(z_0)$ und daher nicht offen.
Nach dem Satz über die Gebietstreue muss f in einer Umgebung von z_0 konstant sein. Der Identitätssatz liefert dann, dass f global konstant ist.

(ii) folgt aus (i).

□

Bemerkungen

- Vergleiche Maximumsprinzipien für reelle Funktionen, z. B. Lösungen der Laplace-Gleichung (" harmonische Funktionen ").

- Betrachtet man $\frac{1}{f}$ statt f so erhält man das Minimumsprinzip.

10 Ganze Funktionen und Polynome

" Was machen Funktionen in der Nähe von ∞ ? "

Bemerkung 10.1
Bald wird ∞, ebenso wie alle anderen auch, als ein Punkt betrachtet.

Definition 10.1 (Ganze Funktion)
Eine in der ganzen komplexen Ebene holomorphe Funktion heißt **ganze Funktion**.

Beispiele

- Polynome,
- exp, sin und cos (transzendente Funktionen, von Lat. transcendere = übersteigen).

Ganze Funktioenen sind also für große $|z|$ definiert. Wie verhalten sie sich dort? Es werden zunächst Polynome betrachtet.

Satz 10.1
Sei $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ein Polynom vom Grad n.

(i) Dann gilt für $|z| \geq 1$:

$$|p(z)| \leq \left(\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \right) |z|^n$$

(ii) Zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ existiert ein $\varrho_\varepsilon \geq 1$, so dass für alle $|z| \geq \varrho_\varepsilon$ gilt:

$$(1 - \varepsilon)\, |a_n| \cdot |z|^n \leq |p(z)| \leq (1 + \varepsilon)\, |a_n| \cdot |z|^n .$$

Entscheidend ist also wie im reellen die höchste Potenz.

Beweis.

(i) Sei $|z| \geq 1$. Dann gilt

$$|p(z)| \leq \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \cdot |z|^\nu \leq \left(\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \right) |z|^n .$$

(ii) Sei ε gegeben, so dass $0 < \varepsilon < 1$. Man definiert

$$\widetilde{p}(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu, \quad \text{d. h.} \;\; p(z) = \widetilde{p}(z) + a_n z^n.$$

Man setze
$$\varrho_\varepsilon = \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon\,|a_n|}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\right)\right\}$$
und nehme an, dass $|z| \geq \varrho_\varepsilon$. Dann gilt wegen (i)
$$|\widetilde{p}(z)| \leq \left(\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\right)\,|z|^{n-1} = \left(\frac{1}{|z|}\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\right)\,|z|^n\,.$$
Falls $\varrho_\varepsilon = 1$, dann ist
$$\frac{1}{\varepsilon\,|a_n|}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\right) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu| \leq \varepsilon\,|a_n|$$
und damit
$$|\widetilde{p}(z)| \leq \frac{1}{|z|}\varepsilon\,|a_n|\,\,|z|^n \leq \varepsilon\,|a_n|\,\,|z|^n\,.$$
Sei hingegen $\varrho_\varepsilon > 1$, dann ist
$$\frac{1}{\varepsilon\,|a_n|}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\right) > 1 \quad \text{und} \quad |z| \geq \varrho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon\,|a_n|}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\right).$$
Daher gilt
$$|\widetilde{p}(z)| \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon|a_n|}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\right)} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\,\,|z|^n = \varepsilon\,|a_n|\,\,|z|^n\,.$$
Daraus folgt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung $|a+b| \geq |a| - |b|$
$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\,|a_n|\cdot|z|^n &\leq |a_n|\cdot|z|^n - |\widetilde{p}(z)|\\ &\leq |p(z)|\\ &\leq |a_n|\cdot|z|^n + |\widetilde{p}(z)|\\ &\leq (1+\varepsilon)\,|a_n|\cdot|z|^n\end{aligned}$$

□

Wegen $(1-\varepsilon)\,|a_n|\cdot|z|^n \leq |p(z)|$ für $z \geq \varrho_\varepsilon$ liegen alle Nullstellen von p, falls es welche gibt, in der abgeschlossenen Kreisscheibe
$$|z| \leq \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon\,|a_n|}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}|a_\nu|\right)\right\}.$$
Daraus bekommt man umgehend folgenden wichtigen Satz.

Satz 10.2 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes nicht konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Bemerkung 10.2
Die Situation ist also mal wieder übersichtlicher als im Reellen. Dort haben manche Polynome eine Nullstelle, andere aber nicht. Die Klassifizierung ist daher im Reellen schwierig.

Beweis. (Des Fundamentalsatzes der Algebra)
Sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $R \geq \max\{1, \varrho_\varepsilon\}$, wobei ϱ_ε wie im voherigen Satz definiert sei, und R so groß, dass $|p(0)| < \frac{1}{2}\ |a_n|\ R^n$. Dann ist mit vorherigem Satz

$$|p(0)| < (1-\varepsilon)\,|a_n|\ |z|^n < |p(z)| \quad \text{für} \quad |z| \geq R,$$

also auch

$$|p(0)| < \min_{|z|=R} |p(z)|\,.$$

Anwendung von **Satz 8.3** liefert dann, dass p eine Nullstelle in $D_R(0)$ besitzt.

□

Man kann **Satz 9.1** auch umkehren. Damit bekommt man gleich noch einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Satz 10.3
Sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ und positive Konstanten R, M mit $|f(z)| \leq M \cdot |z|^n$ für $|z| \geq R$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Bemerkung 10.3
Für den Fall $n = 0$ ist dies der **Satz von Liouville**, benannt nach Joseph Liouville (1809-1882).

Satz 10.4 (Liouville)
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. (von **Satz 9.3**) Sei f eine ganze Funktion, d. h. insbesondere, dass f um $z_0 = 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, z^m$$

besitzt. Im Folgenden wird gezeigt, dass $a_m = 0 \quad \forall m > n$. Dafür sei $r \geq R$. Die Cauchy-Ungleichungen liefern dann, dass

$$|a_m| \leq r^{-m} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq r^{-m} \cdot M \cdot r^n,$$

wobei die letzte Abschätzung nach Voraussetzung gilt. Ist $m > n$, so ist $\frac{r^n}{r^m} < 1$ und geht für $r \to \infty$ gegen Null.

□

Es folgt ein alternativer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (**Satz 9.2**), durch Widerspruch, unter Verwendung von **Satz 9.3**.

Beweis. Angenommen $p(z)$ sei ein nicht konstantes Polynom vom Grad n ohne Nullstellen. Dann ist $\frac{1}{p}$ eine ganze Funktion. Nach **Satz 9.1** existieren positive Konstanten M, R, so dass

$$|p(z)| \geq M \cdot |z|^n \qquad \text{für} \quad |z| \geq R.$$

Daher gilt für $|z| \geq R$ auch

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{1}{M \cdot |z|^n} \leq \frac{1}{M \cdot R^n},$$

d. h. $\frac{1}{p}$ ist auf $\mathbb{C} \backslash \{D_R(0)\}$ beschränkt. Daher ist $\frac{1}{p}$ stetig, also auch auf dem Kompaktum $\overline{D_R(0)}$ beschränkt, woraus folgt, dass $\frac{1}{p}$ beschränkt ist. Der Satz von Liouville liefert dann, dass $\frac{1}{p}$ konstant ist. Daraus folgt aber auch, dass p konstant ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der Annahme, dass p ein nicht konstantes Polynom ist.

□

Eine weitere Aussage ist, dass jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen besitzt, wobei die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit gezählt werden. Dies formulieren wir nun im folgenden Satz.

Satz 10.5
Sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Die verschiedenen Nullstellen von p seien mit $b_1, \ldots, b_r$ bezeichnet und ihre Vielfachheiten mit $n_1, \ldots, n_r$. Dann ist

$$p(z) = c \prod_{\varrho=1}^{r} \left(z - b_\varrho\right)^{n_\varrho}$$

mit einer Konstanten c.

Beweis. Die w-Stellen sind genau die Nullstellen von $p(z) - w$. Daher wird auch w genau n mal angenommen, woraus folgt, dass jedes Polynom vom Grad n jeden Wert genau n-mal annimmt. Immer mit Vielfachheit.

□

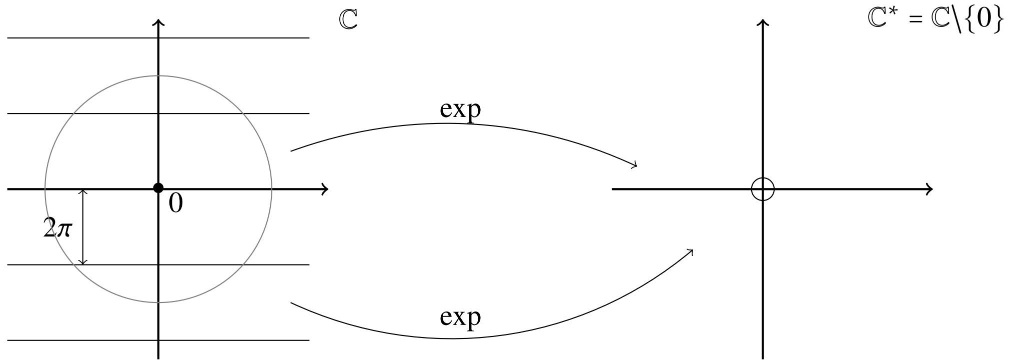
10.1 Transzendente Funktionen

Das Verhalten von Polynomen im Unendlichen war relativ überschaubar:

- Ein Polynom n-ten Grades wächst für $|z| \to \infty$ wie $|z|^n$.
- Eine ganze Funktion, die für $|z| \to \infty$ höchstens wie eine Potenz von $|z|$ wächst, ist ein Polynom.

Für transzendente Funktionen wird es komplizierter, wie das Beispiel der Exponentialfunktion zeigt.

Beispiel 10.1 (Exponentialfunktion)
Jeder horizontale Streifen der Breite 2π wird auf $\mathbb{C}^*$ abgebildet, d. h. dass auch außerhalb eines beliebig großen Kreises jeder Wert angenommen wird.



Satz 10.6
Sei f eine ganze, transzendente Funktion. Dann existiert zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{m\to\infty} |z_m| = \infty$ und $\lim\limits_{m\to\infty} f(z_m) = w_0$.

Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass $f(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ für jedes $R \geq 0$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Es gilt sogar folgender Satz:

Satz 10.7 (Picard)
Jede ganze, transzendente Funktion nimmt außerhalb jeden Kreises jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme als Wert an.

Der **Satz von Picard** kann im Rahmen dieser Vorlesung leider nicht bewiesen werden. Ein Beispiel ist jedoch die Exponentialfunktion.

Beweis. (**Satz 9.6** durch Widerspruch)
Angenommen f sei eine ganze, transzendente Funktion. Sei w_0 eine komplexe Zahl, zu der es **keine** Folge $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} |z_m| = \infty$ und $\lim\limits_{m\to\infty} f(z_m) = w_0$ gibt. Dann existieren Konstanten $R, \varepsilon > 0$, so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \quad \forall z\colon |z| \geq R.$$

Da f transzendent, ist f nicht konstant in w_0 und besitzt, nach dem Identitätssatz, auf daher auf der kompakten Menge $\overline{D_R(0)}$ nur endlich viele w_0-Stellen. Diese seien mit $b_1, \dots, b_r$ bezeichnet und ihre Vielfachheiten mit $n_1, \dots, n_r$. Setze nun

$$g(z) := \frac{f(z) - w_0}{\prod_{\varrho=1}^{r} \left(z - b_\varrho\right)^{n_\varrho}}.$$

$g(z)$ ist also eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Damit ist auch $\frac{1}{g}$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Setze $n = n_1 + \ldots + n_r$. In **Satz 9.3** wurde gezeigt, dass

$$\left|\prod_{\varrho=1}^{r} \left(z - b_\varrho\right)^{n_\varrho}\right| \leq C \cdot |z|^n \qquad \text{für } |z| \geq R, \text{ und eine beliebige Konstante } C.$$

Da nach Annahme $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \quad \forall z\colon |z| \geq R$, gilt auch

$$\left|\frac{1}{g(z)}\right| \leq \widetilde{C} \qquad \text{für } |z| \geq R, \text{ und eine beliebige Konstante } \widetilde{C}.$$

Wiederum nach **Satz 9.3** ist $\frac{1}{g}$ ein Polynom. Da $\frac{1}{g}$ keine Nullstellen besitzt, mußdie Funktion konstant sein. Damit mußaber auch g konstant sein, z. B. $g(z) \equiv c$. Dann ist

$$f(z) = w_0 + c \cdot \prod_{\varrho=1}^{r} \left(z - b_\varrho\right)^{n_\varrho}$$

ein Polynom und daher keine transzendente Funktion. Wiederspruch!

□

Nach **Satz 9.3** gilt, dass eine ganze Funktion f, für welche gilt

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^n \quad \forall z\colon |z| \geq R,$$

M, R passend gewählt, ein Polynom höchstens n-ten Grades ist. Mit **Satz 9.6** kann man die umgekehrte Abschätzung zeigen.

Satz 10.8
Sei f eine ganze Funktion. Es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ und positive Konstanten M, R, so dass

$$|f(z)| \geq M \cdot |z|^n \quad \forall z\colon |z| \geq R.$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\geq n$.

Beweis.

(i) Man zeige f ist ein Polynom.
Für $|z| \geq R$ gilt $|f(z)| \geq M \cdot R^n$. Es existiert also **keine** Folge $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} |z_m| = \infty$ und $\lim\limits_{m\to\infty} f(z_m) = 0$. Nach **Satz 9.6** ist f ein Polynom.

(ii) Man zeige $\deg(f) \geq n$.
Sei $\deg(f) = m$. Dann gilt wegen Satz 9.1

$$|f(z)| \leq M_1 \; |z|^m \qquad \text{für} \quad |z| \geq R_1 \text{ und positive Konstanten } M_1, R_1.$$

Mit der Voraussetzung erhält man

$$M \; |z|^n \leq |f(z)| \leq M_1 \; |z|^m \qquad \text{für} \quad |z| \geq \max\{R, R_1\}.$$

Insgesamt gilt

$$|z|^{n-m} \leq M^{-1} M_1 \qquad \text{für} \quad |z| \geq \max\{R, R_1\}.$$

Damit muss $m \geq n$ sein.

□

11 Der globale Cauchy-Integralsatz

In **Kapitel 5.3** wurde bereits der **Cauchy-Integralsatz** für konvexe Gebiete bewiesen.

Erinnerung

Satz 11.1 (Cauchy'scher Integralsatz für konvexe Gebiete)
Sei G ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und mit eventueller Ausnahme eines Punktes holomorph. Dann gilt für jeden in G verlaufenden geschlossenen Integrationsweg γ

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0.$$

Dieser wird im Folgenden verallgemeinert, indem man sich nicht auf konvexe Gebiete beschränkt. Interessanter Weise kann man dann aus dem Verhalten von Kurvenintegralen topologische Informationen über das Gebiet G erhalten.

11.1 Ketten und Zyklen

Man erinnere sich an den Begriff der Kette aus **Kapitel 4.2**:

Erinnerung

Definition 11.1 (Kette)
Sei W die Menge aller Integrationswege in $U \subset \mathbb{C}$. Eine Kette in U ist eine Abbildung $\Gamma : W \to \mathbb{Z}$, mit $\Gamma(\gamma) \neq 0$ für nur endlich viele Wege γ.
Ketten lassen sich als endliche Linearkombinationen von Integrationswegen

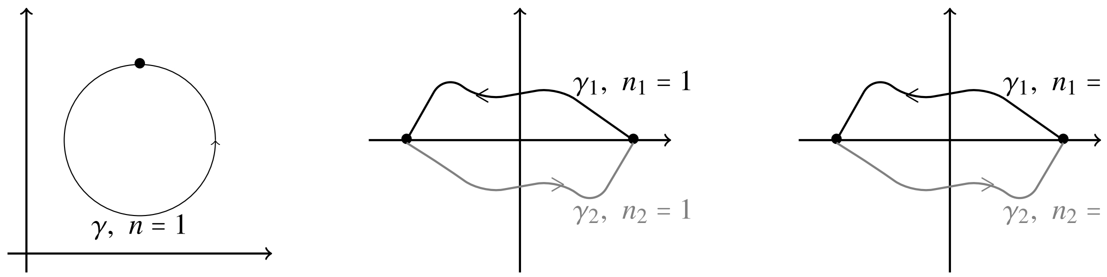
$$\Gamma = \sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i, \qquad \text{mit } n_i \in \mathbb{Z}.$$

Der Satz soll gleich für " Systeme von geschlossenen Wegen " bewiesen werden. Diese Systeme werden Zyklen genannt. Ein Zyklus ist also eine geschlossene Kette.

Definition 11.2 (Zyklus)
Eine Kette $\Gamma = \sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i$ heißt geschlossen, oder ein Zyklus, wenn jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ unter Berücksichtigung der Vielfachheiten n_i genauso häufig als Anfangs- wie als Endpunkt eines Weges γ_i auftritt.

Beispiele

Das linke und mittlere Bild zeigen Beispiele für Zyklen. Obwohl das Bild rechts mit dem in der Mitte übereinstimmt, ist dies trotzdem ein Gegenbeispiel, da die Vielfachheit n_1 von γ_1 ungleich der Vielfachheit n_2 von γ_2 ist. Man kann auch ein Gegenbeispiel konstruieren, indem man die Wege gegenläufig wählt, da dann die Anfangs- und Endpunkte der Wege γ_i übereinstimmen, also jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ entweder Anfangs- oder Endpunkt ist.

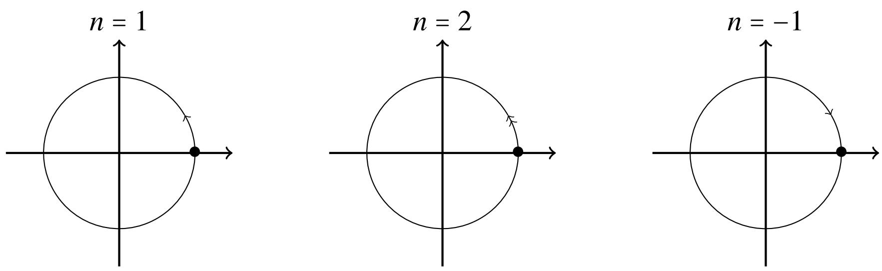


11.2 Umlaufzahlen

Anschaulich gesprochen zählt die *Umlaufzahl*, wie oft ein geschlossener Weg bzw. ein Zyklus " um einen Punkt z herumläuft" . Zum Beispiel

$$\gamma_n \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto re^{int} \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$$

Die Anzahl der Pfeile gebe hier die Anzahl der Umläufe an.



Definition 11.3 (Umlaufzahl)
Sei Γ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} \backslash \{Sp(\Gamma)\}$. Dann ist die Umlaufzahl von Γ bezüglich z gegeben durch

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi.$$

Diese Definition zugestandernermaßen überhaupt nicht anschaulich. Dafür läßt sie sich leicht für Kurvenintegrale nutzen. Dass $n(\Gamma, z)$ tatsächlich der intuitiven Vorstellung einer Umlaufzahl entspricht, muss man sich erst erarbeiten. Man sieht zum Beispiel, wegen der Linearität des Integrals, direkt, dass

(a) $n(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z) \qquad \forall z \notin Sp(\Gamma_1) \cup Sp(\Gamma_2)$,

(b) $n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z) \qquad \forall z \notin Sp(\Gamma)$.

Beispiele

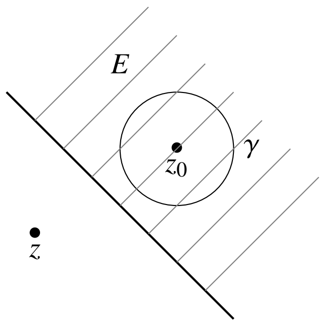
(1) Sei $\gamma(t) = z_0 + re^{imt}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

(i) $n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{imt} - z_0} \cdot rime^{imt}\, dt = \frac{m}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} 1\, dt = m.$

(ii) Für $m = 1$ gilt also für alle $z \in D_R(z_0)$ nach der Cauchy-Integralformel mit $f \equiv 1$:

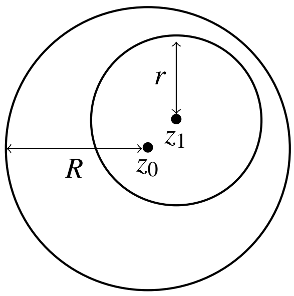
$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi = f(z) = 1.$$

(iii) Sei $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D_R(z_0)}$. Dann ist $n(\gamma, z) = 0$. Dies liegt daran, dass eine Halbebene E mit $Sp(\gamma) \subset E$ und $z \notin E$ existiert. Der Integrand $\frac{1}{\xi - z}$ ist also holomorph auf E und E ist konvex. Dann folgt mit dem Cauchy-Integralsatz für konvexe Gebiete, dass $n(\gamma, z) = 0$ ist.



(2) Sei $\Gamma = K(R, z_0) - K(r, z_1)$ die Differenz zweier Kreislinien und $D_r(z_1) \Subset D_R(z_0)$. Wegen (1) und der Additivität von n hat man

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in D_R(z_0) \backslash \overline{D_r(z_1)} \\ 0 & \text{falls } z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D_R(z_0)} \text{ oder } z \in D_r(z_1) \end{cases}$$



Damit die unanschaulich definierte Umlaufzahl $n(\gamma, z)$ den oben genannten Erwartungen entspricht, sollt sie zumindest ganz sein. Dies liefert der folgende Satz.

Satz 11.2
Sei Γ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} \backslash \{Sp(\Gamma)\}$. Dann ist $n(\Gamma, z)$ eine ganze Zahl.

Beweis. Sei $\Gamma = \sum_{i=1}^{K} n_i \, \gamma_i$ ein Zyklus. Seien o. B. d. A alle Wege γ_i über $[0,1]$ parametrisiert. Dies ist möglich, da das Kurvenintegral nach **Satz 4.2** invariant unter Umparametrisierung ist, und daher auch die Umlaufzahl. Man definiere folgende Hilffunktion

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{K} n_i \int_0^t \frac{\gamma_i(s)}{\gamma_i'(s) - z} \, ds.$$

Es gilt $h(0) = 0$ und $h(1) = n(\Gamma, z)$. Man zeige

$$\exp(2\pi i h(1)) = 1.$$

Dann folgt, dass $h(1) = n(\Gamma, z)$ ganzzahlig ist. Dafür betrachte man eine weitere Hilffunktion

$$g(t) = \exp(-2\pi i h(t)) \prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(t) - z)^{n_i}.$$

Diese Funktion ist als Komposition der stückweise differenzierbaren Funktionen h und γ_i auch stückweise differenzierbar. Unter Verwendung der Produktregel lautet die Ableitung

$$g'(t) = \exp(-2\pi i h(t)) \cdot \left(-2\pi i h'(t)\right) \cdot \prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(t) - z)^{n_i} + \exp(-2\pi i h(t)) \cdot \left(\prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(t) - z)^{n_i} \right)'.$$

Es gilt

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots)' = a' \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots + a \cdot b' \cdot c \cdot d \cdot \ldots + \ldots \quad \Rightarrow \quad \left(\prod_i a_i \right)' = \sum_i \frac{\prod_j a_j}{a_i} \cdot a_i'.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(t) - z)^{n_i} \right)' &= \sum_{l=1}^{K} \frac{\prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(t) - z)^{n_i}}{(\gamma_l(t) - z)^{n_l}} \cdot n_l \, (\gamma_l(t) - z)^{n_l - 1} \cdot \gamma_l'(t) \\ &= \prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(t) - z)^{n_i} \cdot \sum_{l=1}^{K} \frac{n_l \cdot \gamma_l'(t)}{\gamma_l(t) - z}. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt dann

$$g'(t) = \exp(-2\pi i h(t)) \cdot \prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(t) - z)^{n_i} \cdot \left(\left(-2\pi i h'(t)\right) + \sum_{l=1}^{K} \frac{n_l \cdot \gamma_l'(t)}{\gamma_l(t) - z} \right).$$

Andererseits ist

$$h'(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{K} n_l \frac{\gamma_l'(t)}{\gamma_l - z},$$

woraus folgt, dass $g'(t) = 0$ ist. Da g stetig, ist g konstant auf $[0,1]$: $\quad g(t) \equiv c$. Daher gilt

$$\prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(t) - z)^{n_i} = c \exp(2\pi i h(t)).$$

Nach Voraussetzung ist $\gamma_i \neq z$. Daher wird die linke Seite nie Null, woraus $c \neq 0$ folgt.
Als nächstes wird gezeigt, dass

$$\exp(2\pi i h(1)) = \exp(2\pi i h(0))$$

ist. Da $\exp(2\pi i h(0)) = e^0 = 1$ ist, folgt die Behauptung. Es gilt

$$\exp(2\pi i h(1)) = \exp(2\pi i h(0)) \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(1) - z)^{n_i} = \prod_{i=1}^{K} (\gamma_i(0) - z)^{n_i} \ \ (*).$$

Sei w ein Anfangs- oder Endpunkt eines Weges γ_i. Da $\Gamma = \sum_i n_i\, \gamma_i$ ein Zyklus ist, gilt

$$\sum_{w \in \gamma_i(0)} n_i = \sum_{w \in \gamma_i(1)} n_i.$$

Damit kommt in $(*)$ der Faktor $(w - z)$ auf beiden Seiten gleich häufig von. □

Aus der Ganzzahligkeit der Umlaufzahl folgt das schärfere Resultat:

Satz 11.3

(i) Die Umlaufzahl $n(\Gamma, z)$ ist auf jeder Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \{Sp(\Gamma)\}$ konstant.

(ii) Die Umlaufzahtl $n(\Gamma, z)$ ist auf der unbeschränkten Wegkomponente Null.

Beweis.

(i) Die Umlaufzahl
$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$$
ist stetig in z, da der Integrand stetig in z ist. Da die Umlaufzahl zusätzlich ganzzahlig ist, muss sie auf jeder Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \{Sp(\Gamma)\}$ konstant sein.

(ii) Die Spur von Γ $(Sp(\Gamma))$ ist kompakt, d. h. es existiert ein $R > 0$, mit $Sp(\Gamma) \subset \overline{D_R(0)}$. Das Komplement $\mathbb{C} \setminus \left\{\overline{D_R(0)}\right\}$ ist in der unbeschränkten Wegkomponente von $Sp(\Gamma)$ enthalten und enthält seiner seits eine Folge (z_ν) mit $dist(z_\nu, Sp(\Gamma)) \to \infty$. Es gilt
$$\left|\lim_{\nu \to \infty} n(\Gamma, z)\right| = \left|\lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{K} \frac{n_i}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{1}{\xi - z_\nu}\, d\xi\right| \leq \lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{K} \frac{n_i}{2\pi i} L(\gamma_i) \cdot \max_{\xi \in \gamma_i} \left|\frac{1}{\xi - z_\nu}\right| = 0.$$
Da $n(\Gamma, z)$ ganzzahlig ist, muss $n(\Gamma, z)$ auf der unbeschränkten Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \{Sp(\Gamma)\}$ gelten.

□

Bemerkung 11.1
Die Umkehrung des obigen Satzes muss nicht gelten.

Um den Cauchy-Integralsatz für allgemeine Gebiete beweisen zu können, benötigt man noch eine weitere Charakterisierung von Zyklen.

Definition 11.4 (Nullhomologie)
Ein Zyklus Γ in einem Bereich U heißt **nullhomolog** in U, wenn für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus U$ gilt, dass die Umlaufzahl

$$n(\Gamma, z) = 0$$

ist.
Zwei Zyklen Γ_1 und Γ_2 heißen homolog in U, wenn ihre Differenz nullhomolog in U ist.

Beispiele

(a) Die Kreislinie $K = K(r, 0)$ ist in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht nullhomolog, da $n(\Gamma, 0) = 1$ ist.

(b) Zwei Kreislinien $K = K(r, 0)$ und $K' = K(r', 0)$ sind stets homolog in $\mathbb{C}^*$, da gilt

$$n\left(K - K', 0\right) = n(K, 0) - n\left(K', 0\right) = 1 - 1 = 0.$$

Das Konzept der Homologie von Kurven ist verwandt mit der Homotopie von Kurven. Zwei Kurven heißen homotop, wenn sie sich stetig in einander verformen lassen. So gilt zum Beispiel:
In einem Gebiet sind alle Kurven genau dann nullhomolog, wenn alle Kurven nullhomotop sind.
Es gibt aber Gebiete U und Zyklen Γ, so dass Γ in U nullhomolog, aber nicht nullhomotop ist.

11.3 Beweis des allgemeinen Cauchy-Integralsatzes

Satz 11.4 (Allgemeine Cauchy-Integralformeln und allgemeiner Cauchy-Integralsatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen (möglcherweise nicht zusammenhängend). Sei Γ ein nullhomologer Zyklus auf U und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

(i) $\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$

(ii) Für jeden Punkt $z \in U \setminus \{Sp(\Gamma)\}$ und alle $k = 0, 1, \ldots$ ist

$$n(\Gamma, z)\, f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi.$$

Bemerkung 11.2
Man vergleiche (ii) mit der Cauchy-Integralformel aus Kapitel 5:
Für alle z aus einem offenen Kreis D gilt

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi.$$

Beweis. Der aufwändigere Teil ist (ii), aus welchem (i) dann folgt.

(ii) Man kann sich auf den Fall $k = 0$ beschränken, da die anderen Fälle durch Ableitung unter dem Integral folgen. Man forme die Behauptung zunächst, durch Einsetzen der Definition der Umlaufzahl, um:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{(\xi - z)}\, d\xi = 0.$$

Beweisstruktur:

(a) Man zeige, dass eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Fortsetzung $h(z)$ des Integrals existiert.

(b) Beweis, dass $lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0$. Nach dem Satz von Liouville (**9.4**) folgt $h(z) = 0$.

(a) Konstruktion einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Fortsetzung $h(z)$ des obigen Integrals.
Dazu betrachte man den Integranden als Funktion von ξ und z

$$g\colon U \times U \to \mathbb{C}, \quad g(\xi, z) := \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} & \text{für } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{für } \xi = z \end{cases}$$

und zeige, dass g in einem beliebigen Punkt $(\xi_0, z_0) \in U \times U$ stetig ist. Für den Fall $\xi_0 \neq z_0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\xi_0 = z_0$. Man wähle ein relativ kompakte δ-Umgebung $U_\delta(z_0) \Subset U$ von z_0 und schätze $g(\xi, z) - g(z_0, z_0)$ auf $U_\delta(z_0) \times U_\delta(z_0)$ ab.
Falls $\xi = z$ ist, gilt

$$g(z, z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f(z_0).$$

Da f' stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(z, z) - g(z_0, z_0)| = \left|f'(z) - f'(z_0)\right| < \varepsilon \quad \forall z \in U_\delta(z_0).$$

Falls $\xi \neq z$, ist

$$g(\xi - z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} - f'(z_0).$$

Da U_δ konvex ist, gilt nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$f(\xi) - f(z) = \int_{[z,\xi]} f'(w)\, dw,$$

d. h.

$$\begin{aligned} g(\xi - z) - g(z_0, z_0) &= \frac{1}{\xi - z}\int_{[z,\xi]} f'(w)\, dw - f'(z_0)\frac{\xi - z}{\xi - z} \\ &= \frac{1}{\xi - z}\int_{[z,\xi]} f'(w)\, dw - \frac{1}{\xi - z}\int_{[z,\xi]} f'(z_0)\, dw \\ &= \frac{1}{\xi - z}\int_{[z,\xi]} \left(f'(w) - f'(z_0)\right) dw. \end{aligned}$$

Es folgt die Standardabschätzung

$$|g(\xi - z) - g(z_0, z_0)| \leq \frac{1}{|\xi - z|} \cdot \underbrace{L([z, \xi])}_{=|\xi - z|} \cdot \max_{w \in [z,\xi]} \left| f'(w) - f'(z_0) \right| \leq \varepsilon,$$

da f' stetig ist. Damit ist gezeigt, dass g auf $U \times U$ stetig ist.

Noch kann man h nicht definieren, aber zumindest einen Teil. Man setzt

$$h_0(x) = \int_\Gamma g(\xi, z)\ d\xi.$$

Da g auf $U \times U$ stetig, ist h_0 auf U stetig. Im Folgenden wird mit Hilfe des Satzes von Morera gezeigt, dass h_0 auf U holomorph ist.

Erinnerung

Satz (von Morera)
Sei f auf einem Gebiet G stetig. Falls für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz = 0$$

gilt, so ist f holomorph auf G.

Sei also $\partial\Delta$ der orientierte Rand eines Dreieckes Δ, welches ganz in U liegt. Man zeige:

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z)\ dz = 0.$$

Zunächst gilt, da $g(\xi, z)$ stetig auf $U \times U$:

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z)\ dz = \int_{\partial\Delta} \int_\Gamma g(\xi, z)\ d\xi\ dz = \int_\Gamma \int_{\partial\Delta} g(xi, z)\ dz\, d\xi.$$

Für festes ξ ist die Funktion $g(\xi, z)$ stetig in z und sogar holomorph. Aus dem Satz von Goursat (**Satz 5.5**) folgt, dass

$$\int_{\partial\Delta} g(\xi, z)\ dz = 0$$

und somit auch

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z)\ dz = \int_\Gamma \int_{\partial\Delta} g(\xi, z)\ dz\, d\xi = 0.$$

Nun verwendet man die Nullhomologie von Γ. Dazu sei

$$U_0 := \{ z \in \mathbb{C} \colon n(\Gamma, z) = 0 \}.$$

Auf $U \cap U_0$ kann man h_0, da $U_0 \cap Sp(\Gamma) = \varnothing$, wie folgt schreiben:

$$h_0(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z) \underbrace{\int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi}_{=2\pi i \cdot n(\Gamma, z) = 0} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi := h_1.$$

Die Funktion h_1 ist offensichtlich auf ganz U_0 definiert und dort auch holomorph. Damit kann man h_0 auf $U \cup U_0$ holomorph fortsetzen durch

$$h(z) = \begin{cases} h_0(z) & z \in U \\ h_1(z) & z \in U_0. \end{cases}$$

Da Γ nullhomolog in U ist, d. h. $n(\Gamma, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \backslash U$, folgt jedoch, dass

$$(\mathbb{C} \backslash U) \subset U_0 \quad \Rightarrow \quad U \cup U_0 = \mathbb{C}.$$

Damit ist h also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

(b) Man zeige

$$\lim_{|z| \to \infty} h(z) = 0.$$

Abschätzung von $|h(z)|$ für $z \in U_0$:

$$|h_1(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \right| \leq \int_\Gamma \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|}\, d\xi \leq \int_\Gamma \frac{|f(\xi)|}{\min\limits_{w \in Sp(\Gamma)} |w - z|}\, d\xi = \frac{1}{\operatorname{dist}(\Gamma, z)} \underbrace{\int_\Gamma |f(\xi)|\, d\xi}_{\text{konstant}}$$

U_0 enthält das Komplement eines hinreichend großen Kreises um 0. Daher liegen für alle Folgen (z_ν) mit $|z_\nu| \to \infty$ höchstens endlich viele nicht in U_0. Daher gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} h(z_\nu) = 0$$

und h ist also beschränkt. Nun folgt mit dem Satz von Liouville, dass h konstant ist. Da $\lim_{\nu \to \infty} h(z_\nu) = 0$, gilt $h(z) \equiv 0$. Insbesondere ist also $h_0 \equiv 0$.

(i) Folgt wie oben schon erwähnt aus der allgemeinen Cauchy-Integralformel (ii).
Sei a ein Punkt in $U \backslash \{Sp(\Gamma)\}$. Man definiere

$$F(z) = f(z)(z - a).$$

Dann ist F holomorph auf U und $F(a) = 0$. Also gilt

$$0 = n(\Gamma, a) F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z - a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz.$$

□

Folgerung
Seien Γ und Γ' zwei nullhomologe Zyklen in U. Dann gilt für jede auf U holomorphe Funktion f

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\Gamma'} f(z)\, dz.$$

Beweis. Da $\Gamma - \Gamma'$ nullhomolog gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz - \int_{\Gamma'} f(z)\, dz = \int_{\Gamma-\Gamma'} f(z)\, dz = 0.$$

□

Im Cauchy-Integralsatz ist die Nullhomologie von Γ eine hinreichende Bedingung. Sie ist aber auch notwendig. Dies zeigt folgendes Gegenbeispiel:

Beispiel 11.1
Sei Γ in U nicht nullhomolog, d. h. es existiert ein Punkt $a \notin U$ mit $n(\Gamma, a) \neq 0$. Man setze

$$f(z) = \frac{1}{z-a}.$$

Dann folgt

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\Gamma} \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i \cdot n(\Gamma, a) \neq 0.$$

11.4 Anwendung der Umlaufzahl

Bisher gibt es noch keinen praktikablen Weg, um die Umlaufzahl auszurechnen. Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass die Umlaufzahl um 1 zunimmt, wenn man einen glatten Weg von "rechts nach links" überquert. Dazu führe man folgenden Begriff ein.

Definition 11.5
Ein Weg $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ läuft in einem Gebiet G von Rand zu Rand, wenn gilt:

(1) Es existieren Punkte $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ und $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2) \in \partial G$, wobei $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

(2) Für alle t mit $t_1 < t < t_2$ ist $\gamma(t) \in G$.

(3) Für $t \in I$ mit $t \notin [t_1, t_2]$ ist $\gamma(t) \notin \overline{G}$.

(4) $G \setminus Sp(\gamma)$ hat genau zwei Wegkomponenten und $Sp(\gamma) \cap G$ liegt auf dem Rand des Abschlusses jeder dieser beiden Komponenten.

Sei γ glatt und injektiv oder einfach geschlossen. Dann gibt es zu jedem $z_0 \in Sp(\gamma)$ eine Umgebung U, so dass γ in U von Rand zu Rand läuft.

Satz 11.5
Ist $z_1 \in D_1$ und $z_2 \in D_2$, so ist $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) + 1$.

Beweis. Sei γ_0 der Teil zwischen a und b. Seien o. B. d. A. Anfangs- und Endendpunkt von γ nicht in der Spur von γ_0. Man zerlege γ so in Teilwege, dass γ_0 einer dieser Wege ist, d. h.

$$\gamma = \gamma'\gamma_0\gamma''.$$

Dann ist

$$n(\gamma, z_1) - n(\gamma, z_2) = n(\gamma_0, z_1) + n\left(\gamma' + \gamma'', z_1\right) - n(\gamma_0, z_2) - n\left(\gamma' + \gamma'', z_2\right).$$

Dabei wurde die Definition von $n(\cdot,\cdot)$ stillschweigend auf nicht geschlossene Ketten ausgeweitet. Es gilt, dass z_1 und z_2 in der gleichen Wegkomponente von $\gamma' - k_1 + \gamma''$ liegen. Also ist

$$n\left(\gamma' - k_1 + \gamma'', z_1\right) = n\left(\gamma' - k_1 + \gamma'', z_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad n\left(\gamma' + \gamma'', z_1\right) - n\left(\gamma' + \gamma'', z_2\right) = n(k_1, z_1) - n(k_1, z_2).$$

Einsetzen ergibt:

$$n(\gamma, z_1) - n(\gamma, z_2) = n(\gamma_0, z_1) - n(\gamma_0, z_2) + n(k_1, z_1) - n(k_1, z_2).$$

Da z_2 in der unbeschränkten Wegkomponente von $\mathbb{C}\backslash Sp(\gamma_0 + k_1)$ liegt, gilt

$$n(\gamma_0 + k_1, z_2) = 0$$

und wegen $n(k_2 - \gamma_0, z_1)$

$$\begin{aligned} n(\gamma, z_1) - n(\gamma, z_2) &= n(\gamma_0, z_1) + n(k_1, z_1) \\ &= n(\gamma_0, z_1) + n(k_1, z_1) + n(k_2 - \gamma_0, z_1) \\ &= n(k_1, z_1) + n(k_2, z_1) \\ &= n(k_1 + k_2, z_1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Die Klasse von Gebieten, in denen der Cauchy-Integralsatz bzw. die Cauchy-Integralformel für alle Zyklen gelten bekommt jetzt einen eigenen Namen.

Definition 11.6 (Einfacher Zusammenhang)
Ein Gebiet, in dem jeder Zyklus nullhomolog ist, heißt **einfach zusammenhängend**.

Dies sind genau die Gebiete G, in denen für alle auf G holomorphen Funktionen f und alle Zyklen Γ in G gilt, dass

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Beispiel 11.2
Konvexe Gebiete sind einfach zusammenhängend.

Eine genauere Beschreibung einfach zusammenhängender Gebiete liefert der nachfolgende Satz.

Satz 11.6
Folgende Aussagen sind für Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ äquivalent:

(i) G ist einfach zusammenhängend.

(ii) Ist $A = A_1 \cup A_2$ eine Zerlegung von $\mathbb{C} \setminus G$ in disjunkte abgeschlossene Teile A_1 und A_2, so ist $A_\nu,\ \nu = 1, 2$ genau dann kompakt, wenn es leer ist.

Bemerkung 11.3
Anschaulich besagt der Satz, dass einfach zusammenhängende Gebiete keine Löcher haben.

Definition 11.7 (Nullhomotopie)
Ein Zyklus Γ heißt **nullhomotop** in einem Gebiet G, wenn es eine stetige Deformation von Γ in einen Punkt gibt.

Folgende alternative Definition wird auch häufig genannt.

Definition 11.8 (Einfacher Zusammenhang 2)
Ein Gebiet in dem jeder Zyklus nullhomotop ist, heißt einfach zusammenhängend.

Für den Beweis von **Satz 10.6** benötigt man den Hilfssatz.

Hilfssatz 11.1
Sei U eine offene Menge und $A \subset U$ eine kompakt. Dann existiert ein Zyklus Γ in $U \setminus A$ mit

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in A \\ 0 & \text{falls } z \notin U. \end{cases}$$

Beweis. Für den Beweis wird auf [FL] Kapitel IV, §3 Satz 3.3 verwiesen.

□

Beweis. (**Satz 10.6**)
(i) ⇒ (ii):
Sei G einfach zusammenhängend und $\mathbb{C}\backslash G = A_1 \cup A_2$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, A_1, A_2 abgeschlossen und A_1 kompakt. Dann folgt, dass $\mathbb{C}\backslash (A_1 \cup G) = A_2$ abgeschlossen und daher $U := A_1 \cup \mathbb{C}$ offen ist. Nach dem Hilfssatz gibt es einen Zyklus Γ in $U\backslash A_1 = G$ mit $n(\Gamma, a) = 1$ für alle $a \in A_1$. Da aber Γ nach Voraussetzung nullhomolog ist, muss A_1 leer sein.

(ii) ⇒ (i):
Für diese Richtung beweise man die äquivalente Formulierung ¬(i) ⇒ ¬(ii). Sei G nicht einfach zusammenhängend und Γ ein in G nicht nullhomologer Zyklus. Man setze

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C}\backslash G\colon\ n(\Gamma, z) \neq 0\}$$
$$A_2 = \{z \in \mathbb{C}\backslash G\colon\ n(\Gamma, z) = 0\}.$$

Offensichtlich gilt

$$\mathbb{C}\backslash G = A_1 \cup A_2 =: A, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Nach Voraussetzung ist A_1 nicht leer. Desweiteren ist A_1 beschränkt, da $n(\Gamma, \cdot) = 0$ auf der unbeschränkten Wegkomponente. Es wird gezeigt, dass A_1 und A_2 abgeschlossen sind. Dann ist insbesondere A_1 kompakt und nicht leer.
Sei $A' = A_1$ oder $A' = A_2$ und (a_ν) eine Folge in A' mit $a_\nu \to a_0$. Da A Komplement einer offenen Menge ist und somit abgeschlossen, ist $a_0 \in A = A_1 \cup A_2$. Insbesondere ist $a_0 \notin Sp(\Gamma)$ und daher ist $n(\Gamma, a_0)$ definiert. Da die Umlaufzahl lokal konstant ist, folgt aus $a_\nu \to a_0$, dass

$$n(\Gamma, a_\nu) \to n(\Gamma, a_0).$$

Also ist $a_0 \in A'$ und A' ist abgeschlossen. □

12 Die Umkehrung der elementaren Funktionen

Problem:
Wo sind Umkehrfunktionen definiert?
Im Reellen ist das noch einigermaßen klar.

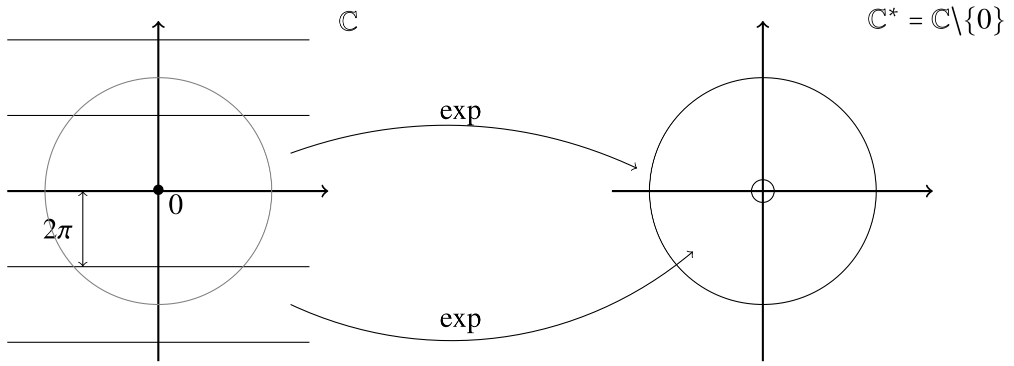
Beispiel 12.1
$y = x^2$
PLOTS
Für $y \geq 0$ gibt es Umkehrfunktionen und zwar genau zwei: $x = \sqrt{y}$ und $x = -\sqrt{y}$.
Diese sind für $y > 0$ sogar differenzierbar.

Bemerkung 12.1
Alternativ kann man auch sagen, dass es für $y \geq 0$ eine Umkehrfunktion gibt, welche für $y > 0$ zweiwertig ist.

Im Komplexen wird alles etwas komplizierter. Dafür steht am Ende eine wunderschöne Theorie: Die Riemannschen Flächen.

12.1 Der Logarithmus

Bekanntermaßen bildet die Exponentialfunktion $\mathbb{C}$ surjektiv auf $\mathbb{C}^*$ ab und hat die Periode $2\pi i$.



Das bedeutet, dass es zu jedem $z \in \mathbb{C}^*$ unendlich viele $w \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $\exp(w) = z$. Jedes dieser w heißt **Logarithmus** von z. Die Logarithmen von z unterscheiden sich durch Vielfache von $2\pi i$.

Lemma
Jeder Logarithmus von z hat die Form

$$w = \log|z| + i\arg(z).$$

Beweis.
$$e^w = e^{\log|z|+i\arg(z)} = e^{\log|z|} \cdot e^{i\arg(z)} = |z| \cdot (\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))) = z.$$
□

Damit kann man auch direkt Logarithmen negativer reeller Zahlen erklären. So ist zum Beispiel

$$\log|-1| + i\arg(-1) = \pi i$$

ein Logarithmus von -1. Sind w_1 und w_2 Logarithmen von z_1 bzw. z_2, so ist

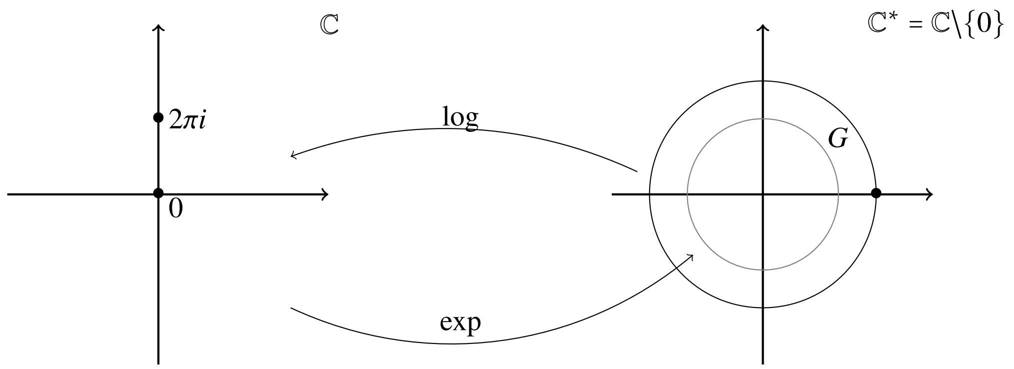
$$e^{w_1+w_2} = e^{w_1} \cdot e^{w_2} = z_1 \cdot z_2,$$

d. h. w_1+w_2 ist ein Logarithmus von $z_1 \cdot z_2$. Seien aber umgekehrt w_1, w_2 und w_3 Logarithmen von z_1, z_2 bzw. $z_1 \cdot z_2$, dann kann man nicht schließen, dass $w_1 + w_2 = w_3$ ist, sonder nur dass $w_1 + w_2 = w_3 + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Sei jetzt G ein Gebiet, so dass $0 \notin G$. Dann kann man natürlich viele Funktionen angeben, die $z \in G$ auf einen seiner Logarithmen abbilden.
Es bleibt zu klären, ob dies stetig oder sogar holomorph möglich ist.

Definition 12.1 (Zweig des Logarithmus (Z. d. Log.))
Sei $G \in \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ heißt **Zweig des Logarithmus** oder auch **eine** Logarithmusfunktion, wenn
$$e^{f(z)} = z \quad \forall z \in G.$$

Dass es nicht immer eine solche Funktion geben muss, zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 12.2



Sei G ein "ringförmiges" Gebiet, welches den Einheitskreis enthält. Sei $z = 0$ und damit $w = \exp(z) = 1$. Dann ist z ein Logarithmus von 1. Wenn man nun mit z senkrecht nach oben wandert, so wandert w entgegen des Uhrzeigersinns um den Einheitskreis. Wenn also umgekehrt w um den Einheitskreis wandert und man möchte, dass $z = \log(w)$ stetig von w abhängt, so muss z nach oben wandern. Ist w dann einmal um den Kreis gelaufen, dann ist z bei $2\pi i$ angekommen. Dies bedeutet, dass die Abbildung $w \mapsto z$ nicht stetig in 1 ist.

Sei f ein Z. d. Log. auf einem Gebiet G.

- Dann ist $\exp\colon f(G) \to G$ die Umkehrfunktion, also ist f injektiv.
- Die Funktionen $f_k(z) = f(z) + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ sind dann auch Z. d. Log..
- Dies sind alle Zweige. Denn sei g ein weiterer Zweig, so ist

$$e^{f(z)-g(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{g(z)}} = \frac{z}{z} = 1 \quad \Rightarrow f(z) - g(z) = 2k\pi i.$$

Das gleiche Problem der Vielfachheit hat man zum Beispiel auch bei der Argumentfunktion. Diese ist auch nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Definition 12.2 (Zweig des Argumentes (Z. d. Arg.))
Auf $G \subset \mathbb{C}^*$ existiert ein **Zweig des Argumentes**, falls es eine stetige Funktion $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\varphi(z)$ für jedes $z \in G$ ein Argument von z ist.

Allerdings muss man sich über die Argumentfunktion kaum separate Gedanken machen.

Satz 12.1
Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Auf G existiert genau dann eine stetige Argumentfunktion, wenn auf G ein Zweig des Logarithmus existiert.

Beweis. Siehe [FL] Seite 118. □

Die Stetigkeit der Zweige des Logarithmus wurde in der Definition gefordert. Wie sieht es jedoch mit Holomorphie aus?

Satz 12.2
Es existiere auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Zweig des Logarithmus. Dann ist f holomorph und es gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Beweis. Die Funktion $f\colon G \to f(G)$ ist bijektiv mit der Umkehrfunktion $\exp\colon f(G) \to G$. Seien $z, z_0 \in G$. Man setzt $w = f(z)$ und $w_0 = f(z_0)$. Die Ableitung von f an der Stelle z_0, falls sie existiert, ist

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Da aber

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{w - w_0 f}{\exp(w) - \exp(w_0)}$$

und f stetig, ist

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0 f}{\exp(w) - \exp(w_0)} = \lim_{w \to w_0} \frac{1}{\exp(w)}$$

und mit de l'Hopital

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{\exp(w_0)} = \frac{1}{z_0}.$$

□

Wann genau gibt es jetzt Zweige des Logarithmus?

Satz 12.3
Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Auf G existiert ein Zweig des Logarithmus.

(ii) Auf G existiert eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$.

(iii) Für jeden Zyklus Γ in G ist $n(\Gamma, 0) = 0$.

Beweis. (i) ⇒ (ii):
Dies haben wir oben bewiesen. Der Zweig ist die gesuchte Stammfunktion.

(ii) ⇒ (i):
Sei $g \colon G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$. Dann ist

$$\left(ze^{-g(z)}\right)' = \left(1 - zg'(z)\right) e^{-g(z)} = 0.$$

Also ist $ze^{-g(z)}$ eine Konstante und da $z \neq 0$, ist diese Konstante $\neq 0$. Man schreibt sie als e^c. Dann ist $f(z) = g(z) + c$ ein Zweig des Logarithmus, da

$$e^{f(z)} = e^{g(z)+c} = e^{g(z)} \cdot e^c = e^{g(z)} \cdot ze^{-g(z)} = z.$$

(ii) ⇒ (iii):
Ist $n(\Gamma, 0) = 0$, dann ist $\int_\Gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion besitz. (vgl. **Satz 5.2** und Cauchy-Integralsatz).

□

Wenn es in einem Gebiet G einen Zweig des Logarithmus gibt, so kann man konkret einen konstruieren, indem man

- den Wert an einem Punkt a festlegt und dann
- die Funktionswerte entlang von Pfande erweitert.

Dann folgt, wobei γ_z ein Weg von a nach z sei, dass

$$f(z) = \int\limits_{\gamma_z} \frac{1}{\xi}\, d\xi + \log(a),$$

ein Zweig des Logarithmus ist, da f stetig, g eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$

$$e^{f(z)} = e^{\int_{\gamma_z} \frac{1}{\xi}\, d\xi + \log(a)} = e^{g(z)-g(a)+\log(a)} = e^{g(z)} \cdot \underbrace{ae^{-g(a)}}_{\text{konstant}} = e^{g(z)} \cdot ze^{-g(z)} = z.$$

Es gilt

$$f(a) = \log(a).$$

Beispiele

(a) Auf $\mathbb{C}^*$ existiert kein Zweig des Logarithmus, da für jeden Kreis $D = D_r(0)$ die Umlaufzahl $n(D,0) = 1 \neq 0$.

(b) Ist G einfach zusammenhängend, so ist $n(\Gamma,0) = 0$ für alle Zyklen Γ in G. Daher existiert ein Zweig des Logarithmus. Ein häufig benutzter Spezialfall ist die aufgeschnittene Ebene

$$\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}_- = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{R}\colon z \leq 0\}.$$

Diese ist einfach zusammenhängend. Man definiere dort mit $a = 1$

$$\mathrm{Log}(z) = \int_{[1,z]} \frac{1}{\xi}\, d\xi$$

den **Hauptzweig** des Logarithmus. Dieser stimmt auf der positiven reellen Achse mit dem reellen Logarithmus überein. Betrachte den Weg $\gamma_z = [1,|z|]\, D_z$ von 1 nach z. Dann erhält man

$$\mathrm{Log}(z) = \int_{[1,|z|]} \frac{1}{\xi}\, d\xi + \int_{D_z} \frac{1}{\xi}\, d\xi = \log|z| + i\arg(z),$$

mit $-\pi < \arg(z) < \pi$. Da der Hauptzweig eine holomorphe Fortsetzung des reellen Logarithmus ist, liefert dessen Taylorreihe sofort

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} z^\nu \quad \text{für } |z| < 1.$$

Bemerkung 12.2 (zu Beispiel (b))
Man kann die Ebene auch entlang eines anderen Strahles S aufschneiden. Ist $S \neq \mathbb{R}_+$, so existiert wieder eine Fortsetzung des reellen Logarithmus. Allerdings stimmt dieser nur auf der Wegkomponente von $(\mathbb{C}\backslash S) \cap (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-)$ mit dem Hauptzweig überein, die $\mathbb{R}_+$ enthält. Auf der anderen Wegkomponente unterscheiden sie sich um $2\pi i$.

12.2 Geometrische Interpretation der Umlaufzahl

Mit der Kenntnis über die Logarithmusfunktion, kann man nun auch das Integral in der Definition der Umlaufzahl verstehen.
Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}^*$ ein geschlossener Integrationsweg. Man bertrachte, der Einfachheit halber, $n(\gamma, 0)$.
Es existiert eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b,$$

so dass jeder Teilweg $\gamma_\nu = \gamma|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ in einem Gebiet G_ν verläuft, auf welchem ein Zweig des Logarithmus existiert. Man setzt

$$z_\nu = \gamma(t_\nu).$$

Auf jedem Gebiet G_ν wähle man eine Zweig des Logarithmus

$$f_\nu(z) = \log|z| + i\varphi_\nu(z),$$

dabei sei f_1 beliebig und es gelte

$$f_{\nu+1}(z_\nu) = f_\nu(z_\nu) \quad \forall \nu = 1, \ldots, n-1.$$

Die Funktion φ mit

$$t \mapsto \varphi_\nu(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$$

ist dann stetig auf $[a,b]$ und ordnet jedem t ein Argument von $\gamma(t)$ zu. Nach dem Hauptsatz der Differentialrechnung ist

$$\int_{\gamma_\nu} \frac{1}{z}\, dz = \log|z_\nu| - \log|z_{\nu-1}| + i\left(\varphi_\nu(z_\nu) - \varphi_\nu(z_{\nu-1})\right).$$

Dies bedeutet, dass der Imaginärteil die Änderung des Argumentes von $\gamma(t)$ misst, wenn t von $t_{\nu-1}$ nach t_ν läuft. Insgesamt ergibt sich

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} \frac{1}{z}\, dz = i\left(\varphi_n(z_0) - \varphi_1(z_0)\right) = i\left(\varphi(b) - \varphi(a)\right).$$

Der Imaginärteil misst also die Gesamtänderung des Argumentes entlang des Pfades γ. Daher misst

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz$$

tatsächlich, wie oft $\gamma(t)$ insgesamt den Nullpunkt umläuft.

12.3 Potenzen

Intuitiv geschrochen hat eine Funktion $f(x) = x^b,\ b \in \mathbb{Z}$ die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{b}}$. Die Suche nach Umkehrfunktionen führt also zur Behandlung von Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten.
Im Reellen definiert man

$$a^b := \exp(b \ln a), \quad b \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Dies wirkt künstlich, es gilt aber folgender Satz, für dessen Beweis auf ([Fo], Satz 12.6) verwiesen wird.

Satz 12.4
Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$F(x+y) = F(x) \cdot F(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dann ist entweder $F(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, oder es ist $a := F(1) > 0$ und $F(x) = \exp(x \ln a)$.

Dies soll nun ins Komplexe übertragen werden.

Definition 12.3
Sei $a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}$ und $\log(a)$ ein Logarithmus von a. Dann wird die Zahl $\exp(b \log(a))$ ein **Wert der b-ten Potenz von a** genannt und man schreibt

$$a^b = \exp(b \log(a)).$$

Der Wert von a^b hängt von der Wahl des Logarithmus ab. Seien $\log(a)$ und $\widetilde{\log}(a)$ zwei Logarithmen von a. Dann gilt

$$a^b = \exp(b \log(a)) = \exp\left(b\left(\widetilde{\log}(a) + 2k\pi i\right)\right) = \exp\left(b \cdot \widetilde{\log}(a)\right) \cdot \exp(2k\pi i \cdot b) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Zwei verschiedene Werte von a^b unterscheiden sich also um einen Faktor $\exp(2k\pi i \cdot b)$.

(i) Ist b ganzzahlig, so ist $\exp(2k\pi i \cdot b) = 1$. Also besitzt a^b nur einen Wert und dieser ist die übliche Potenz.

(ii) Ist b irrational, so erhält man abzählbar unendlich viele Werte von a^b.

(iii) Sei $b = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\exp\left(2k\pi i \cdot \frac{1}{n}\right) = \exp\left(2k'\pi i \cdot \frac{1}{n}\right)$$

genau dann, wenn $k - k'$ ein Vielfaches von n ist.
Wenn k die ganzen Zahlen durchläuft, nimmt $\exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)$ die n verschiedenen Werte

$$\xi_n^1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right), \quad \xi_n^2 = \exp\left(\frac{4\pi i}{n}\right), \ldots, \quad \xi_n^n = \exp\left(\frac{2n\pi i}{n}\right) = 1$$

an.
Sei $\log(a)$ ein fester Logarithmus von a. Dann nimmt $a^{\frac{1}{n}}$ die Werte

$$\exp\left(\frac{1}{n} \cdot \log(a)\right), \quad \xi_n^1 \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \log(a)\right), \ldots, \quad \xi_n^{n-1}\left(\frac{1}{n} \cdot \log(a)\right)$$

an. Diese Zahlen sind genau die n-ten Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ von a, denn

$$\left(\xi_n^k \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \log(a)\right)\right)^n = \left(\exp\left(\frac{2k\pi i}{n} + \frac{1}{n} \cdot \log(a)\right)\right)^n = \exp(2k\pi i + \log(a)) = a.$$

Für den Fall $a = 1$ sind die n-ten Wurzeln die Zahlen $1,\ \xi_n^1,\ \xi_n^2,\ \ldots,\ \xi_n^{n-1}$. Diese heißen die **die n-ten Einheitswurzeln**.
PLOT

12.4 Exponential- und Potenzfunktionen

Betrachtet man im Ausdruck a^b entweder a, oder b als variabel, so erhält man

(a) die Exponentialfunktion zur Basis a: $z \mapsto a^z$, oder

(b) die Potenzfunktion $z \mapsto z^b$

12.4.1 Die Exponentialfunktion

Sei $a \neq 0$. Für jede Wahl von $\log(a)$ ist $z \mapsto \exp(z \log(a))$ eine ganze Funktion. Jede dieser Funktionen wird mit a^z bezeichnet. Es gilt

$$a^{z_1+z_2} = a^{z_1} \cdot a^{z_2}$$

und

$$\frac{d}{dz}(a^z) = \log(a) \cdot \exp(z \log(a)) = \log(a) \cdot a^z.$$

Setzt man $a = e$, so erhält man die Exponentialfunktionen e^z. Wählt man zusaätzlich $\log(e) = 1$, dann ist $e^z = \exp(z)$ die gewöhnliche Differentialfunktion.

12.4.2 Die Potenzfunktion

Definition 12.4 (Zweig der Potenz (Z. d. P.))
Sei $G \in \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig des Logarithmus erklärt ist. Dann heißt die Funktion

$$z \mapsto \exp(b \log(z))$$

ein **Zweig der b-ten Potenz** auf G.

Bemerkung 12.3
Jeder Zweig der b-ten Potenz ist holomorph. Es gilt

$$\frac{d}{dz}\left(z^b\right) = \frac{d}{dz}\exp(b \log(z)) = \exp(b \log(z)) \cdot \frac{b}{z} = b \cdot z^{b-1},$$

dabei muss z^{b-1} mit dem gleichen Zweig des Logarithmus erklärt werden wie z^b. Es gilt

$$(z_1 \cdot z_2)^b = z_1^b \cdot z_2^b \quad \Leftrightarrow \quad \log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2).$$

Zweige der Potenz existieren genau dann, wenn auch Zweige des Logarithmus existieren. Insbesondere also auf einfach zusammenhängenden Gebieten, die den Nullpunkt **nicht** enthalten.

Hauptzweig der Potenzfunktion
Der Hauptzweig der Potenzfunktion ist auf der entlang von $\mathbb{R}_-$ aufgeschnittenen Ebene mittels des Hauptzweiges des Logarithmus definiert. Er stimmt für reelles b auf der positiven reellen Achse mit

der reellen Potenzfunktion überein. Die Taylorreihenentwicklung von $(1+z)^b$ um $z_0 = 0$ für $|z| < 1$ lautet:

$$(1+z)^b = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{b}{\nu} z^\nu$$

mit dem verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{b}{\nu} = \frac{1}{\nu!} b\,(b-1)\ldots(b-\nu+1)\,.$$

12.5 Potenzen von Funktionen

Die holomorphe Funkiton $f\colon G \to \mathbb{C}^*$ habe einen holomorphen Logarithmus g, d. h. $f(z) = e^{g(z)} \quad \forall z \in G$. Dann kann man durch

$$(f(z))^b = e^{b(g(z)+2k\pi i)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

auch holomorphe b-te Potenzen von f bilden.

Beispiel 12.3
Sei $G = \mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ und $f(z) = \frac{z-a}{z-b}$. Es ist $f(G) = \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ und es existiert **kein** Zweig des Logarithmus auf $f(G)$. Man berechne die Potenz von $f(z)$. Da dies jedoch nicht ohne Weiteres möglich ist, betrachtet man Folgendes.

Ausweg I:
Wähle $G^* = \mathbb{C}\backslash[a,b]$. Dann ist $f(G^*) = \mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}_-$ und auf $f(G^*)$ existiert ein Zweig des Logarithmus. Daher kann man auf G^* Potenzen von f bilden. Es existieren beispielsweise zwei Zweige von

$$\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}.$$

Ausweg II:
Wähle $G^* = \mathbb{C}\backslash(\{z = a + t(b-a)\colon t < 0\} \cup \{z = b + t(a-b)\colon t < 0\})$. Damit ist G^* einfach zusammenhängend und f ist auf G^* biholomorph. Dann existieren aber auch Zweige des Logarithmus und somit auch Potenzen von f auf G^*.

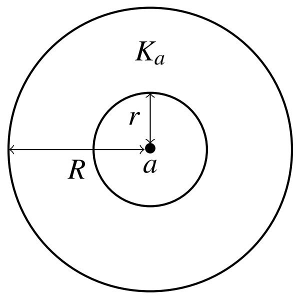
13 Isolierte Singularitäten

Bisher wurden fast ausschließlich holomorphe Funktionen betrachtet. Viele interessante Funktionen sind aber nur mit Ausnahme einzelner Punkte holomorph, wie zum Beispiel

$$\frac{1}{z}, \quad \tan(z) \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+z^2}.$$

13.1 Potenzreihen für Funktionen mit Singularitäten

Als Vorüberlegung werden Reihendarstellungen für holomorphe Funktionen auf Kreisringen betrachtet. Sei $K_a\,(r,R) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ r < |z-a| < R\}$ ein Kreisring, wobei $r = 0$ und $R = \infty$ erlaubt seien.



Satz 13.1
Sei f holomorph auf $K_a\,(r,R)$. Dann existieren Funktionen f_1 und f_2 mit

- f_1 holomorph auf $U_1 = \{|z-a| > r\}$,
- f_2 holomorph auf $D_R(a)$,

so dass auf $K_a(r,R) = U_1 \cap D_R(a)$ die Zerlegung

$$f = f_1 + f_2$$

gilt. Dabei kann f_1 so gewählt werden, dass $\lim\limits_{z\to\infty} |f_1(z)| = 0$ gilt. Die Zerlegung von f ist dann eindeutig.

Beweis. Man definiere auf $D_\varrho(a)$ die holomorphe Funktion

$$f_{2,\varrho}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-a|=\varrho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Sei $\widetilde{\varrho} \in \mathbb{R}$ ebenfalls mit $r < \widetilde{\varrho} < R$. Die Kreise mit Radius ϱ und $\widetilde{\varrho}$ sind homolog in K_a, daher gilt mit dem Cauchy-Integralsatz

$$f_{2,\varrho}(z) = f_{2,\widetilde{\varrho}}(z) \quad \forall z \in D_{\min\{\varrho,\widetilde{\varrho}\}}(a),$$

d. h. die genaue Wahl von ϱ ist irrelevant. Man definiere

$$f_2(z) = f_{2,\varrho}(z) \quad \text{mit} \quad \max\{r, |z-a|\} < \varrho < R.$$

Genauso erhält man für $r < \sigma < \min\{R, |z-a|\}$ eine auf U_1 holomorphe Funktion

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-a|=\sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

und mit der Standardabschätzung

$$\lim_{z\to\infty} |f_1(z)| = 0.$$

Die Funktionen f_1 und f_2 bilden eine Zerlegung von f, denn:
Sei $z \in K_a(r,R)$. Wählt man nun ϱ und σ mit $r < \sigma < |z-a| < \varrho < R$, dann ist der Zyklus

$$\Gamma = K(\varrho, a) - K(\sigma, a)$$

nullhomolog in $K_a(r,R)$. Die Cauchy-Integralformel liefert dann

$$\underbrace{n(\Gamma,z)}_{=1} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K(\varrho,a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K(\sigma,a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f_1(z) + f_2(z).$$

Die Eindeutigkeit wird wie üblich gezeigt:
Sei $g_1 + g_2$ eine weitere Zerlegung von f. Man betrachte die Differenz zu $f_1 + f_2$ und verwende den Satz von Liouville.

□

Bemerkung 13.1
Man nennt

- f_1 den **Hauptteil** von f und
- f_2 den **Nebenteil** von f.

Im Folgenden werden Potenzreihenentwicklungen für die einzelnen Teile und damit auch die Reihenentwicklung für die Summe hergeleitet.

(1) Der Nebenteil ist holomorph auf dem Kreis $U_2 = D_R(a)$. Daher existiert eine Reihenentwicklung

$$f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu.$$

(2) Für den Hauptteil benötigt man einen Trick:
Die Funktion

$$F\colon w \mapsto a + \frac{1}{w}$$

bildet $D_{\frac{1}{r}}(0)\backslash\{0\}$ biholomorph auf $\mathbb{C}\backslash\overline{D_r(a)}$ ab. Daher ist $f_1 \circ F$ holomorph auf $D_{\frac{1}{r}}(0)\backslash\{0\}$. Wegen

$$\lim_{z\to\infty} |f_1(z)| = 0$$

ist auch

$$\lim_{w\to 0} (f_1 \circ F)(w) = 0.$$

Setzt man nun

$$(f_1 \circ F)(0) = 0,$$

dann ist $f_1 \circ F$ holomorph auf $D_{\frac{1}{r}}(0)$. Es existiert also ein Taylorentwicklung

$$(f_1 \circ F)(w) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu w^\nu,$$

welche für jedes $\varrho > r$ gleichmäßig auf $\overline{D_{\frac{1}{\varrho}}(0)}$ konvergiert. Einsetzen von $w = F^{-1}(z) = (z-a)^{-1}$ ergibt

$$f_1(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (z-a)^{-\nu}.$$

Diese Reihe konvergiert für alle $\varrho > r$ gleichmäßig auf $\mathbb{C}\backslash\overline{D_\varrho(a)}$. Mit $a_{-\nu} = b_\nu$ folgt nun

$$f_1(z) = \sum_{\nu=-1}^{-\infty} a_\nu (z-a)^\nu.$$

Satz 13.2
Sei f holomorph auf $K_a(r,R)$. Dann existiert dort die Darstellung

$$f(z) = \sum_{\nu=-1}^{-\infty} a_\nu (z-a)^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu.$$

Dabei konvergiert die erste Reihe auf $\mathbb{C}\backslash\overline{D_r(a)}$ lokal gleichmäßig gegen den Hauptteil und die zweite Reihe konvergiert auf $D_R(a)$ lokal gleichmäßig gegen den Nebenteil von f.

Definition 13.1 (Laurent-Reihe)
Reihen der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

heißen **Laurent-Reihen**. Eine solche Reihe heißt konvergent in z_1, wenn die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z_1-a)^\nu,$$

Reihe des Nebenteils von f, und

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu (z_1-a)^\nu,$$

Reihe des Hauptteils von f, konvegieren. Die Summe dieser Reihen ist der Wert von

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z_1 - a)^\nu .$$

Dabei konvergiert der Nebenteil einer Laurent-Reihe auf einem Kreis $D_R(a)$ und der Hauptteil auf $\mathbb{C} \backslash D_r(a),\ r > 0$. Wenn also gilt, dass $r < R$ ist, dann konvergiert die Laurent-Reihe auf dem Kreisring $K_a(r, R)$.

Satz 13.3 (Identitätssatz)
Stellen

$$L_1(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

und

$$L_1(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z-a)^\nu$$

auf einem nicht leeren Kreisring die gleiche Funktion dar, so ist $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Satz 13.4 (Darstellungssatz)
Im Kreisring $K_a(r, R)$ sei

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu .$$

Dann gilt für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und für alle $n \in \mathbb{Z}$

(i) $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K(\varrho,a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi$ (Integralformel)

(ii) $|a_n| \leq \varrho^{-n} \sup\limits_{|z-a|=\varrho} |f(z)|$ (Standardabschätzung).

13.2 Isolierte Singularitäten

Definition 13.2
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und f eine Funktion, die auf einer Umgebung von z_0 mit Ausnahme von z_0 definiert und holomorph ist. Dann heißt z_0 **isolierte Singularität von** f.
Sei U eine Umgebung von z_0. Dann nennt man $U \backslash \{z_0\}$ die punktierte Umgebung von z_0.

Beispiele

(1) Die Funktion $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.

(2) $f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$ besitzt in $z = 0$ und $z = i$ isolierte Singularitäten.

(3) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ besitzt ebenfalls in $z = 0$ eine isolierte Singularität.

(4) Die Funktion

$$f(z) = \cot\left(\frac{\pi}{z}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$

ist auf $\mathbb{C}\backslash\left(A := \left\{z \in \mathbb{C}\colon \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}\right)$ definiert. Sie besitz in $z = 0$ keine isolierte Singularität von f, da 0 Häufungspunkt von A ist, aber A diskret in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ liegt. Also ist jedes $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ eine isolierte Singularität von f.

Isolierte Singularitäten lassen sich in drei unterschiedliche Klassen einteilen.

Definition 13.3
Sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f\colon U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$.

(i) Ist f auf einer punktierten Umgebung $V\backslash\{z_0\} \subset U\backslash\{z_0\}$ von z_0 beschränkt, so heißt z_0 **hebbare Singularität von** f.

(ii) Ist $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$, so heißt z_0 ein **Pol von** f.

(iii) Ist z_0 weder eine hebbare Singularität noch ein Pol von f, so heißt z_0 **wesentliche Singularität von** f.

Für hebbare Singularitäten gilt der **Riemannsche Hebbarkeitssatz**:

Satz 13.5
Sei z_0 eine hebbare Singularität von $f\colon U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$, d. h. f ist auf einer punktierten Umgebung $V\backslash\{z_0\}$ von z_0 beschränkt. Dann gibt es auf ganz U eine holomorphe Funktion $\hat{f}$, mit

$$\hat{f}|_{U\backslash\{z_0\}} = f.$$

Bemerkung 13.2
Der Name kommt daher, dass durch $\hat{f}$ die Singularität *aufgehoben* wird.

Beweis. Man setze

$$F(z) = \begin{cases} (z - z_0)\, f(z) & \text{für } z \in U\backslash\{z_0\} \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Die so gewählte Funtion F ist holomorph auf $U\backslash\{z_0\}$ und da f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt, stetig in z_0. Dann ist F aber auch komplex differenzierbar in z_0, da f nach **Satz 5.7** in einer Umgebung von z_0 eine Stammfunktion besitzt. Also existiert eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + (z - z_0)\, A(z),$$

wobei A stetig in z_0 ist. Nach Konstruktion von F ist $A = f$ auf $U\backslash\{z_0\}$. Dann ist A holomorph auf ganz U und daher die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f.

□

13.3 Pole

Sei z_0 ein Pol von f. Dann existiert eine punktierte Umgebung $V\backslash\{z_0\}$ von z_0, auf welcher f nicht verschwindet. Auf $V\backslash\{z_0\}$ ist $\frac{1}{f}$ holomorph und es gilt $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Also kann $\frac{1}{f}$ durch 0 holomorph in z_0 fortgesetzt werden. Dann gilt

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n\, g(z) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

und einer auf V holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$. Man erhält

$$f(z) = (z - z_0)^{-n}\, h(z)$$

auf einer punktierten Umgebung $W\backslash\{z_0\}$ mit $W \subset V$, wobei $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ holomorph auf W und $h(z_0) \neq 0$. Die Zahl n heißt **Ordnung** oder **Vielfachheit des Pols** z_0 **von** f. Ist z_0 diskrete Nullstelle der Ordnung $n \geq 1$ von g, so ist z_0 Pol der Ordnung n von $\frac{1}{g}$. Pole verhalten sich also lokal wie die negative Potenz z^{-n}.

Satz 13.6
Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann ein Pol n-ter Ordnung, wenn auf einer punktierten Umgebung von z_0

$$M_1 |z - z_0|^{-n} \leq |f(z)| \leq M_2 |z - z_0|^{-n}$$

mit positiven Konstanten $M_1,\ M_2$ gilt.

Beweis.

$\underline{\Rightarrow}$: Ist z_0 ein Pol der Ordnung n, so gilt

$$f(z) = (z - z_0)^{-n},$$

wie oben. Man wähle nun M_1 und M_2 so, dass in einer Umgebung von z_0 die Ungleichung

$$0 < M_1 \leq |h(z)| \leq M_2$$

erfüllt ist.

$\underline{\Leftarrow}$: Gilt umgekehrt, wie im Satz die Ungleichung

$$M_1 |z - z_0|^{-n} \leq |f(z)| \leq M_2 |z - z_0|^{-n},$$

so ist

$$(z - z_0)^n f(z)$$

in der Nähe von z_0 beschränkt, also nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz durch eine Funktion h holomorph in den Punkt z_0 fortsetzbar. Da $|(z - z_0)^n f(z)|$ durch $M_1 > 0$ nach unten beschränkt ist, gilt $h(z_0) \neq 0$. Damit gilt

$$f(z) = (z - z_0)^{-n},$$

also die Behauptung.

□

13.4 Wesentliche Singularitäten

Für jede punktierte Umgebung $V\backslash\{z_0\}$ einer wesentlichen Singularität liegt $f\left(V\backslash\{z_0\}\right)$ dicht in $\mathbb{C}$.

Satz 13.7 (Casorati-Weierstraß)
Eine isolierte Singularität z_0 von $f\colon U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn es zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge $\left(z_\mu\right)$ in $U\backslash\{z_0\}$ gibt mit $z_\mu \to z_0$ und $f\left(z_\mu\right) \to w_0$.

Beweis.

$\underline{\Rightarrow}$: Sei z_0 wesentliche Singularität von f. Angenommen es existiere eine punktierte Umgebung $V\backslash\{z_0\}$ von z_0, $V \subset U$, deren Bild $f\left(V\backslash\{z_0\}\right)$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liege. Dann existiert ein$w_0 \in \mathbb{C}$ und eine Kreisscheibe $D_\varepsilon\left(w_0\right)$, so dass

$$f\left(V\backslash\{z_0\}\right) \cap D_\varepsilon\left(w_0\right) = \varnothing.$$

Also ist

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \quad \forall z \in V\backslash\{z_0\}.$$

Daraus folgt, dass

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

auf $V\backslash\{z_0\}$ holomorph und durch $\frac{1}{\varepsilon}$ beschränkt ist. Daher ist die Singularität in z_0 hebbar. Es gibt zwei Fälle

(i) Für

$$\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$$

besitzt

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$$

in z_0 eine hebbare Singularität.

(ii) Ist

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = 0,$$

so besitzt $f(z)$ in z_0 einen Pol.

Daher kann f in z_0 unmöglich eine wesentliche Singularität besitzen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass z_0 wesentliche Singularität sei.

$\underline{\Leftarrow}$: Diese Richtung ist offensichtlich.

□

13.5 Klassifikation isolierter Singularitäten via Laurent-Reihen

Da eine punktierte Kreisscheibe ein Sonderfall eines Kreisrings ist, kann man Funktionen mit einer isolierten Singularität in $a \in \mathbb{C}$ in einer Umgebung von a in eine Laurent-Reihe entwickeln.

Satz 13.8
Auf der punktierten Kreisscheibe $K_a(0, \varepsilon)$ gelte

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu .$$

Die isolierte Singularität a von f ist

(i) hebbar $\Leftrightarrow$ $a_\nu = 0 \quad \forall \nu < 0$,

(ii) ein Pol der Ordnung n $\Leftrightarrow$ $a_{-n} \neq 0$ und $a_\nu = 0$ für $\nu < -n$,

(iii) wesentlich $\Leftrightarrow$ $a_\nu \neq 0$ für unendlich viele negative ν.

Beweis.

(i) Ist a hebbar, so muss wegen der Eindeutigkeit der Laurent-Reihenentwicklung in $K_a(0, \varepsilon)$ die Laurent-Reihe von f die Taylor-Reihe der holomorphen Fortsetzung $\hat{f}$ von f auf $D_\varepsilon(a)$ sein. Ist umgekehrt die Laurent-Reihe von f eine Potenzreihe, so liefert diese die holomorphe Fortsetzung von f in a.

(ii) Die Gleichung

$$f(z) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \quad \text{mit } a_{-n} \neq 0,$$

ist äquivalent zu

$$f(z) = (z-a)^{-n} h(z) \quad \text{mit } h(a) \neq 0.$$

Man setze

$$h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-n} (z-a)^\nu .$$

(iii) Dies folgt aus (i) und (ii) durch Negation.

□

Beispiele

(1) Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \pm \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \pm \ldots$$

besitzt keinen Hauptteil. Daher lässt sie sich holomorph durch

$$\frac{\sin(0)}{0} := 1$$

in 0 fortsetzen. Die Singularität in 0 ist also hebbar.

(2) Die Laurent-Reihenentwicklung von

$$f(z) = \frac{1}{z\,(z-i)^2}$$

um den Nullpunkt lautet

$$\frac{1}{z\,(z-i)^2} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{i}\right)^2} = \frac{-1}{z} \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1) \left(\frac{z}{i}\right)^{\mu}.$$

Also besitzt $f(z)$ in 0 einen Pol der Ordnung 1.
Die Laurent-Reihenentwicklung um i ist gegeben durch

$$\frac{1}{z\,(z-i)^2} = -\frac{1}{z} + \frac{z-2i}{(z-i)^2} = \underbrace{\frac{i}{1 - i(z-i)}}_{\text{geom. Reihe}} - \frac{i}{(z-i)^2} + \frac{z-i}{(z-i)^2}.$$

Sie besitzt also in i einen Pol der Ordnung 2.

(3) Die Laurent-Entwicklung von $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ um 0 ist

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{1}{z}\right)^{\nu} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \ldots$$

Da $a_\nu \neq 0$ für unendlich viele negative ν, besitzt $f(z)$ in 0 eine wesentliche Singularität.

14 Meromorphe Funktionen

Polstellen sind recht einfach zu handhaben. Man kann also holomorphe Funktionen mit Polstellen betrachten.

Definition 14.1
Eine meromorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion $f\colon U \backslash P_f \to \mathbb{C}$, wobei

(1) P_f diskret in U und

(2) jedes $z \in P_f$ ein Pol von f ist.

Eigenschafen

(a) Eine meromorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ lässt sich um jeden Punkt $z \in U$ in eine Laurent-Reihe entwickeln.

(b) Falls $z \notin P_f$, so hat diese Reihe keinen Hauptteil.

(c) Die Reihe konvergiert mindestens im größten punktierten Kreis $D_r(z) \backslash \{z\}$, welcher noch in $U \backslash P_f$ enthalten ist.

Beispiele

(1) Jede holomorphe Funktion ist auch meromorph.

(2) Seien g und h holomorph auf U und h auf keiner Wegkomponenete von U identisch Null. Dann ist $\frac{g}{h}$ meromorph. Pole von $\frac{g}{h}$ können höchstens in den Nullstellen von h auftreten.

(3) Rationale Funktionen, wie zum Beispiel $\tan(z)$ und $\cot(z)$ sind meromorph.

Es gilt auch die Umkehrung von (2):

Satz 14.1
Ist f meromorph auf U, so hat jeder Punkt $a \in U$ eine Umgebung $V \subset U$, so dass f auf V Quotient zweier holomorpher Funktionen g und h ist.

Beweis. Falls a ein Pol der Ordnung n ist, so hat man lokal $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$. Ist a kein Pol von f, so kann man $g = f$ und $h \equiv 1$ wählen.

□

Besitzt f auf U endlich viele Pole, so hat

$$g(z) = (z - a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_m)^{n_m} f(z)$$

nur hebbare Singularitäten, d. h. auf ganz U gilt

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_m)^{n_m}}.$$

Die Menge der meromorphen Funktionen hat mehr algebraische Struktur, als die Menge der holomorphen Funktionen.

- Man kann meromorphe addieren:
  Seien f und g meromorphe Funktionen auf U mti Polstellen P_f bzw. P_g. Dann ist $f + g$ auf $U \backslash \left(P_f \cup P_g\right)$ holomorph, $P_f \cup P_g$ diskret in U und die Punkte von $P_f \cup P_g$ sind hebbare Singularitäten oder Pole.
- Die Menge der meromorphen Funktionen kennt ein multiplikatives Inverses Element:
  Sei U zusammenhängend und $f \not\equiv 0$. Dann ist die Nullstellenmenge von f diskret in U. Also ist die Menge der Pole von $\frac{1}{f}$ diskret in U, woraus folgt, dass $\frac{1}{f}$ meromorph ist.

Satz 14.2 (ohne Beweis)
Die auf einem Gebiet G meromorphen Funktionen bilden einen Körper.

14.1 Die Riemannsche Zahlensphäre

Meromorphe Funktionen haben in den Polen keinen Wert. Man würde sie jedoch gerne in den Polen stetig fortsetzen. Dies ist aber mit keinem $z \in \mathbb{C}$ möglich, da die Funktionswerte gegen ∞ streben, wenn man sich einem Pol nähert. Einen Ausweg bietet die Definition eines neuen Wertes "∞".

Definition 14.2 (Riemannsche Zahlensphäre)
Die Menge

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

heißt **abgeschlossene Ebene** oder **Riemannsche Zahlensphäre**.

Man kann nun $f(z_0) = \infty$ für jede Polstelle z_0 setzen, jedoch ist es nicht möglich, von einer stetigen Fortsetzung zu sprechen. Dafür benötigt man zunächst eine Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$, d. h. ein System von offenen Mengen. Für die Wahl einer Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ gibt es diverse Möglichkeiten.

Sei a ein Pol von f, d. h. $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = +\infty$.
Zu jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass $f(U_\delta(a) \backslash \{a\})$ im Komplement von K liegt.

Definition 14.3
Eine Teilmenge $M \subset \hat{\mathbb{C}}$ heißt Umgebung von ∞, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass $\hat{\mathbb{C}} \backslash K \subset M$. Eine Teilmenge $M \subset \hat{\mathbb{C}}$ heißt Umgebung von $z \in \mathbb{C}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $D_\varepsilon(z) \subset M$ ist.

Insbesondere enthält jede Umgebung von ∞ das Komplement einer hinreichend großen Kreisscheibe.

Definition 14.4
Eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ heißt offen, wenn zu jedem $p \in U$ eine Umgebung von p in U enthalten ist.

Es gilt:
Die offenen Teilmengen von $\hat{\mathbb{C}}$ sind genau die offenen Mengen von $\mathbb{C}$, zusammen mit den Mengen der Form $\hat{\mathbb{C}} \backslash K$, wobei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt.

Konvergenz von Folgen ist wie üblich mittels Umgebungen erklärt:
Eine Folge $(z_\mu) \in \hat{\mathbb{C}}$ konvergiert gegen $z \in \hat{\mathbb{C}}$, wenn jede Umgebung von z unendlich viele Folgenglieder z_μ enthält.

Wenn man nun in jeden Pol a einer meromorphen Funktion f immer $f(a) = \infty$ setzt, dann gilt:
Eine Funktion $f\colon U \to \hat{\mathbb{C}}$ ist genau dann meromorph, wenn:

(a) f stetig ist,

(b) $f^{-1}(\infty)$ diskret in U liegt und

(c) f ausserhalb von $f^{-1}(\infty)$ holomorph ist.

folgendess Resultat mag überraschen, da $\mathbb{C}$ ja unbeschränkt ist.

Satz 14.3
$\hat{\mathbb{C}}$ ist ein kompakter topologischer Raum.

Bemerkung 14.1
Ein topologischer Raum X heißt kompakt, wenn

(a) je zwei verschiedene Punkte aus X disjunkte Umgebungen besitzen (Hausdorffsches Trennungsaxiom).

(b) jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Beweis. Es wird nur (b) bewiesen.
Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\hat{\mathbb{C}}$. Dann gibt eis ein $i_0 \in I$ mit $\infty \in U_{i_0}$. Man setze $K = \mathbb{C} \backslash U_{i_0}$. Dann ist K kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Die in $\mathbb{C}$ offenen Mengen $U_i' = U_i \backslash \{\infty\}$ überdecken $\mathbb{C}$, also auch K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung von K

$$K \subset U_{i_1}' \cup U_{i_2}' \cup \ldots \cup U_{i_n}'.$$

Dann ist $(U_{i_\nu})_{0 \leq \nu \leq n}$ eine endliche Überdeckung von $\hat{\mathbb{C}}$.

$\square$

14.2 Geometrische Interpretation der Zahlensphäre

Man betrachte den $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten x_1, x_2, x_3 und identifiziere $\mathbb{C}$ mit der (x_1, x_2)-Ebene. Sei nun S^2 die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$, also

$$S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}.$$

Man projeziere S^2 vom Nordpol $N = (0, 0, 1)$ aus stereographisch auf $\mathbb{C}$, d. h.

$$\varphi : S^2 \backslash \{N\}, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3} (x_1 + ix_2).$$

φ ist bijektiv und stetig. Die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 \backslash \{N\}, \quad \varphi^{-1}(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)$$

ist auch stetig. Man setzt φ fort zu

$$\hat{\varphi} : S^2 \to \hat{\mathbb{C}} \quad \text{mit} \quad \hat{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{für} \quad \xi \neq N, \; \hat{\varphi}(N) = \infty.$$

Dies ist eine Bijektion.
Also topologischer Raum kann $\hat{\mathbb{C}}$ daher mit S^2 identifiziert werden. Auch die Kompaktheit ist jetzt anschaulich klar.
Aber die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen hat keine einfache Interpretation auf der Einheitssphäre.

14.3 Der Residuensatz

Der Cauchy-Integralsatz besagt in etwa, dass Integrale von holomorphen Funktionen Null sind. Was passiert jedoch, wenn die Funktionen isolierte Singularitäten haben dürfen?

Definition 14.5
Sei f eine auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, bis auf isolierte Singularitäten, holomorphe Funktion. Sei $z \in U$ und $K = K(r, z)$ eine Kreislinie, so dass höchstens z eine Singularität von f in $\overline{D_r(z)}$ ist. Dann heißt die Zahl

$$\operatorname{res}_z(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(\xi) \; d\xi$$

Residuum von f in z.

Nach dem Cauchy-Integralsatz kommt es auf den genauen Kreistadius nicht an. Statt K kann man sogar jeden nullhomologen Weg γ mit $n(\gamma, z) = 1$ betrachten, der keine anderen Singularität von f enthält. Ist f in z holomorph, so ist nach dem Cauchy-Integralsatz $\operatorname{res}_z(f) = 0$.

Falls z eine Singularität von f ist, so gibt es die Laurent-Entwicklung

$$f(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (\xi - z)^\nu .$$

Da

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$$

ist, folgt, dass

$$\mathrm{res}_z(f) = a_{-1}.$$

Beispiele

(1) Die Funktion $\frac{1}{z-a}$ hat in a das Residuum 1

(2) Die Funktion $\frac{1}{(z-a)^n}$, $n \geq 2$ hat in a das Residuum 0.

(3) Die Laurent-Reihe von $e^{\frac{1}{z}}$ um 0 war gegeben durch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!\, z^\nu}$$

und daher ist $\mathrm{res}_0\left(e^{\frac{1}{z}}\right) = 1$.

Satz 14.4 (Residuensatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und f eine Funktion, welche in U holomorph bis auf isolierte Singularitäten ist. Dann gilt für jeden nullhomologen Zyklus Γ in U, auf dessen Spur keine Singularität von f liegt

$$\int_\Gamma f(\xi)\ d\xi = 2\pi i \sum_{z\in U} n(\Gamma, z)\, \mathrm{res}_z(f).$$

Bemerkung 14.2
Die Summe rechts ist endlich, da

- $n(\Gamma, z) \neq 0$ nur auf einer relativ kompakten Teilmenge von U und
- U nur endlich viele Singularitäten von f enthält.

Beweis. Seien $z_1, \ldots, z_n$ die Singularitäten von f mit $n\left(\Gamma, z_\mu\right) \neq 0$. Sei M die Menge der übrigen Singularitäten von f. Weiterhin sei $h_\mu(z)$ der Hauptteil der Laurent- Entwicklung von f um z_μ. Dann ist h_μ holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\left\{z_\mu\right\}$, also ist $f - \sum_{\mu=1}^{m} h_\mu$ holomorph auf $U\setminus M$. Weil Γ in U nullhomolog und wegen $n(\Gamma, w) = 0$ für alle $w \in M$, ist Γ auch in $U\setminus M$ nullhomolog. Dann liefert der Cauchy-Integralsatz

$$\int_\Gamma \left(f(\xi) - \sum_{\mu=1}^{m} h_\mu(\xi)\right) d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma f(\xi)\ d\xi = \sum_{\mu=1}^{m} \int_\Gamma h_\mu(\xi)\ d\xi.$$

Die Reihe

$$h_\mu(z) = \sum_{\nu=-1}^{-\infty} \left(a_\mu\right)_\nu \left(z - z_\mu\right)^\nu$$

konvergiert gleichmäßig auf der Spur von Γ. Daher ist

$$\int_\Gamma h_\mu(\xi)\ d\xi = \sum_{\nu=-1}^{-\infty} \left(a_\mu\right)_\nu \int_\Gamma \left(\xi - z_\mu\right)^\nu\ d\xi.$$

Bis auf den Fall $\nu = -1$ haben die $\left(\xi - z_\mu\right)^\nu$ Stammfunktionen, also

$$\int_\Gamma \left(\xi - z_\mu\right)^\nu = 0 \quad \text{für } \ \nu < -1.$$

Daraus folgt

$$\int_\Gamma h_\mu(\xi)\ d\xi = \left(a_\mu\right)_{-1} \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z_\mu}\ d\xi = \operatorname{res}_{z_\mu}(f) \cdot 2\pi i \cdot n\left(\Gamma, z_\mu\right).$$

□

Wie kann man Residuen praktisch ausrechnen?
Die Integraldefinition

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(\xi)\ d\xi$$

ist in den meisten Fällen zu umständlich. Es ist daher besser $\operatorname{res}_{z_0}(f) = a_{-1}$ zu betrachten, wobei a_{-1} der Koeffizient von $(z - z_0)^{-1}$ in der Laurent-Entwicklung von f um z_0 ist. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

(1) Ist z_0 ein Pol erster Ordnung von f, so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z),$$

da

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \sum_{\nu=-1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = \lim_{z \to z_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-1} (z - z_0)^\nu = a_{-1}.$$

(2) Ist g in z_0 holomorph und hat f in z_0 einen Pol erster Ordnung, so ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(gf) = g(z_0) \cdot \operatorname{res}_{z_0}(f).$$

(3) Ist h in einer Umgebung von z_0 holomorph und hat dort eine Nullstelle erster Ordnung, so ist

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{1}{h}\right) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^{\nu-1}} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{h'(z_0)}.$$

(4) (2) und (3) ergeben zusammen

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(5) Für Pole höherer Ordnung und essentielle Singularitäten wird es schwieriger. Ein Beispiel ist: Falls f in z_0 einen Pol n-ter Ordnung besitzt, so ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0) \quad \text{mit} \quad g(z) = (z - z_0)^n \cdot f(z).$$

14.4 Anwendung des Residuensatzes

Eine wichtige Anwendung des Residuensatzes ist die Berechnung reeller Integrale. Dazu muss man zunächst das reelle Integrationsintervall mit einem geschlossenen Integrationsweg in $\mathbb{C}$ in Bezug setzen und anschließend das komplexe Integral mit Hilfe des Residuensatzes berechnen. Man betrachte Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\ dt,$$

wobei R eine rationale Funktion zweier Variablen sei, so dass $R(\cos(t), \sin(t))$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ definiert ist. Wenn t das Intervall $[0, 2\pi]$ durchläuft, dann durchläuft $z(t) = e^{it}$ den Einheitskreis. Man benutze daher die Darstellung von cos und sin bezüglich der Exponentialfunktion:

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right), \qquad \sin(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\ dt &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right) \cdot \frac{ie^{it}}{ie^{it}}\ dt \\ &= \frac{1}{i} \int_{K(0,1)} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{z}\ dz.\end{aligned}$$

Da der Integrand rational ist, lässt sich der Residuensatz anwenden. Es ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\ dt = 2\pi \sum_{|\xi|<1} \operatorname{res}_{\xi}\left(\frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\right).$$

Beispiel 14.1
Sei $a > 1$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\,dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{z}\,dz \\
&= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2az+1}\,dz \\
&= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz \\
&= 2\pi\,\mathrm{res}_{z_1}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} \\
&= 2\pi\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} \\
&= \frac{2\pi}{z_1-z_2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}
\end{aligned}
$$

wobei z_1 und z_2 die entsprechenden Nullstellen sind:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -a + \sqrt{a^2-1} \quad \in D_1(0) \\
z_2 &= -a - \sqrt{a^2-1} \quad \notin D_1(0)
\end{aligned}
$$

Als nächstes werden Integrale über die ganze reelle Achse betrachtet.

Satz 14.5
Sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole besitzt. Der Grad des Nenners von $R(z)$ sei um mindestens zwei höher, als der des Zählers. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\Im m(z)>0} \mathrm{res}_z(R(\xi)).$$

Beweis. Das Integral existiert wegen der Gradbedingung.
Man setze $\gamma_r\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto re^{it}$ und wähle r so groß, dass alle Pole von R im Kreis $D_r(0)$ liegen. Dann folgt mit dem Residuensatz, dass

$$\int_{[-r,r]} R(z)\,dz + \int_{\gamma_r} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\Im m(z)>0} \mathrm{res}_z(R(\xi)).$$

Das Integral über den Halbkreis verschwindet, wenn man nur den Radius großgenug macht:
Wegen der Gradbedingung an R ist für große $|z|$ also $|R(z)| \leq c\,|z|^{-2}$, wobei c eine Konstante ist. Daher gilt für große r

$$\left| \int_{\gamma_r} R(z)\, dz \right| \leq \pi r \max_{z \in Sp(\gamma_r)} |R(z)| \leq \pi r c r^{-2} = \frac{\pi c}{r}$$

und es folgt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} R(z)\, dz = 0.$$

□

Beispiel 14.2
Man berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx.$$

Der komplexe Integrand $\frac{z^2}{1+z^4}$ hat die Pole

$$\xi = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \xi^3 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad \xi^5 \quad \text{und} \quad \xi^7.$$

Diese Pole sind alle von erster Ordnung, wobei nur ξ und ξ^3 in der oberen Halbebene liegen. Daher ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{\xi}\left(\frac{z^2}{1+z^4}\right) + \operatorname{res}_{\xi^3}\left(\frac{z^2}{1+z^4}\right) \right).$$

Man berechne die Residuen und erhält:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\xi}\left(\frac{z^2}{1+z^4}\right) &= \frac{\xi^2}{(\xi-\xi^3)(\xi-\xi^5)(\xi-\xi^7)}\\
\operatorname{res}_{\xi^3}\left(\frac{z^2}{1+z^4}\right) &= \frac{\xi^6}{(\xi^3-\xi)(\xi^3-\xi^5)(\xi^3-\xi^7)}.
\end{aligned}$$

Weiteres rechnen liefert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

15 Riemannsche Flächen

Die Behandlung von Umkehrfunktionen war bisher eher unbefriedigend. Dies liegt daran, dass man mehrdeutige Funktionen erhält. Bei geschickter Wahl der Gebiete kann man die Mehrdeutigkeit auflösen, indem man *Zweige* betrachtet. Diese Zweige sind aber immer nur *Teile* der kompletten Funktion. Eine elegante Lösung bietet das Konzept der Riemannschen Flächen. Die Idee ist eine Überlagerung der komplexen Ebene mit einem komplizierteren Gebilde, auf dem die Funktion eindeutig ist.

15.1 Analytische Fortsetzung

Man betrachte die drei Gebiete $G_1,\ G_2,\ G_3$. Sei f_1 ein fester Zweig des Logarithmus auf G_1. Auf G_2 gibt es genau einen Zweig des Logarithmus, welcher auf der Menge $G_1 \cap G_2$ mit dem Zweig f_1 übereinstimmt. Auf dem Gebiet $G_2 \cap G_3$ gilt dann aber **nicht** $f_3 = f_1$, sondern $f_3 = f_1 + 2\pi i$. Ähnliches gilt für die Wurzelfunktionen und für kompliziertere mehrwertige Funktionen mit komplizierteren Gebietsketten. Gebietsketten können helfen, die Struktur des Mehrdeutigkeitsverhalten einer Funktion zu verstehen.

Definition 15.1 (Analytische Fortsetzung)
Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg von z_0 nach z_1. Die Funktion f sei in einem Kreis $D_\varepsilon(z_0)$ und die Funktion g sei auf einem Kreis $D_\eta(z_1)$ holomorph. Man sagt, g entstehe **durch analytische Fortsetzung von** f **entlang von** γ, falls

(a) eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ existiert

(b) es Umgebungen U_ν von $\gamma([t_{\nu-1}, t_\nu])$ gibt und

(c) holomorphe Funktionen $f_\nu\colon U_\nu \to \mathbb{C}$ existieren,

so dass

(i) $f_\nu = f_{\nu+1}$ auf der Wegkomponente von $\gamma(t_\nu)$ in $U_\nu \cap U_{\nu+1}$ für alle $\nu = 1, \ldots, n-1$,

(ii) $f_1 = f$ in einer Umgebung von z_0 und

(iii) $f_n = g$ in einer Umgebung von z_1.

Gibt es zu gegebenem f und γ ein g, welches durch analytische Fortsetung von f entlang γ entsteht, so sagt man, dass f entlang γ analytisch fortsetzbar ist.
So eine Funktion g muss es nicht immer geben. Zum Beispiel gibt es ein solches g nicht, wenn γ durch einen Pol von f geht.
Wenn f entlang γ analytisch fortsetzbar ist, so hängt das Ergebnis g nicht von t_ν, U_ν oder f_ν ab. Es ist aber eindeutig durch f und γ bestimmt (Identitätssatz). Im Allgemeinen hängt das Ergebnis g vom Verlauf von γ ab, siehe Beispiel.

Beispiel 15.1

Man betrachte den Hauptzweig des Logarithmus auf $D_1(1)$, gegeben durch

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(z-1)^{\nu}.$$

Jeder Zweig entsteht aus dem Hauptzweig durch analytische Fortsetzung entlang eines geeigneten Weges. Zum Beispiel erhält man den Zweig, welcher in $z_1 = -2$ den Wert $\log(2) + (2k+1)\pi i$, $(k \geq 0)$ hat, durch den Weg von $z_0 = 1$ nach $z_1 = -2$, der die Null k mal im positiven Sinne umläuft.

Im folgenden wird die Abhängigkeit der analytischen Fortsetzbarkeit vom gewählten Weg untersucht. Man vermutet intuitiv, dass sich nichts ändert, wenn man den Pfad nur ein bisschen verändert. Dies wird nun formalisiert.
Sei U eine Teilmenge von $\hat{\mathbb{C}}$ und $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to U$ seien Wege mit gleichem Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1.

Definition 15.2
Der Weg γ_1 heißt in U homotop zu γ_0, wenn es eine stetige Abbildung

$$H\colon [a,b] \times [0,1] \to U$$

gibt, so dass

$$\begin{aligned} &H(t,0) = \gamma_0(t), \qquad && H(t,1) = \gamma_1(t) \qquad && \forall t \in [a,b] \\ &H(a,s) = z_0, && H(b,s) = z_0 && \forall s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Ein solches H heißt Homotopie von γ_0 nach γ_1. Es ist eine "stetige Deformation von Wegen in U".

Ist γ_1 in U homotop zu γ_0, so schreibt man $\gamma_0 \sim \gamma_1$ oder genauer $\gamma_0 \sim_U \gamma_1$. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege von z_0 nach z_1 in U. Man hat also:

a) Reflexivität, b) Symmetrie und c) Transitivität.

Die Menge der Wege von z_0 nach z_1 in U zerfällt daher in Äquivalenzklassen, die sogenannten *Homotopieklassen (in U)*. Diese Homotopieklassen sind invariant unter Parametertransformationen.

Satz 15.1 (Monodromiesatz)
Sei G offen in $\mathbb{C}$, $H\colon [a,b] \times [0,1] \to G$ eine Homotopie von Wegen mit gemeinsamen Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1. Die auf $D_\varepsilon(z_0)$ gegebene holomorphe Funktion f sei längs eines jeden Weges $\gamma_s = H(\cdot, s)$ analytisch fortsetzbar. Dann führt die Fortsetzung entlang γ_s für alle s zur gleichen Funktion g.

Beweis. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt:

a) Für kleine Änderungen von s und

b) für alle $s \in [0, 1]$.

a) Sei $s_0 \in [0, 1]$. Die Fortsetzung von f entlang γ_{s_0} liefere g_{s_0}.
Man zeige, dass für jedes s nahe s_0 die Fortsetzung von f entlang γ_s ebenfalls g_{s_0} liefert.
Dazu wähle man für γ_{s_0}, wie in der Definition, t_ν, U_ν und f_ν. Also ist $U = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_\nu$ offen. Dann ist auch $H^{-1}(U)$ offen in $[a, b] \times [0, 1]$ und enthält $[a, b] \times \{s_0\}$. Nun enthält $H^{-1}(U)$ aber auch $[a, b] \times W$, wobei W eine Umgebung von s_0 in $[0, 1]$ ist. Sei V_ν die Wegkomponente von $\gamma_{s_0}(t_\nu)$ in $U_\nu \cap U_{\nu+1}$. Es gilt $\gamma_s(t_\nu) \in V_\nu$ für alle $s \in W$ und $\nu = 1, \ldots, n-1$, falls W noch eventuell weiter verkleinert wurde. Dann folgt, dass t_ν, U_ν und f_ν für alle $s \in W$ eine Fortsetzung von f definieren, die zu g_{s_0} führt.

b) Sei g das Ergebnis der Fortsetzung von f entlang γ_0. Man setze

$$J = \{s \in [0, 1] \mid \text{Für alle } 0 \le \sigma \le s \text{ ergibt die Fortsetzung von } f \text{ entlang } \gamma_\sigma \text{ die Funktion } g\}.$$

Dann ist $0 \in J$ und wegen a) ist J offen.
Angenommen $J \neq [0, 1]$. Dann ist insbesondere $s_0 = \sup J \notin J$. Die Fortsetzung von f entlang von γ_{s_0} ergibt $g_{s_0} \neq g$. Wegen a) existiert aber ein $\varepsilon > 0$, so dass auch $\gamma_{s_0-\varepsilon}$ die Funktion g_{s_0} ergibt. Da aber $s_0-\varepsilon \in J$ ist, ergibt die Fortsetzung entlang $\gamma_{s_0-\varepsilon}$ die Funktion g. Widerspruch!

□

Satz 15.2
In einem Gebiet G seien je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop. Sei $z_0 \in G$ und die in $D_\varepsilon(z_0)$ holomorphe Funktion f sei entlang jedes von z_0 ausgehenden Weges in G fortsetzbar. Dann gibt es eine auf ganz G holomorphe Funktion F, die auf $D_\varepsilon(z_0)$ mit f übereinstimmt.

Die Bedingung an G bedeutet übrigens wieder, dass G einfach zusammenhängend ist.

Beweis. Zu $z \in G$ wähle man einen Weg γ_z in G von z_0 nach z. Man setze f entlang von γ_z zu einer Funkion g_z fort. Diese Funktion g_z ist auf einem Kreis $U(z) \subset G$ um z holomorph. Nach dem Monodromiesatz hängt g_z nicht von γ_z ab. Seien nun $z_1, z_2 \in G$ mit $U(z_1) \cap U(z_2) \neq \varnothing$. Es ist zu zeigen, dass $g_{z_1} = g_{z_2}$ auf $U(z_1) \cap U(z_2)$ ist.
Man wähle ein $z_* \in U(z_1) \cap U(z_2)$. Dann lässt sich g_{z_*} entlang des Weges $\gamma_{z_1}([z_1, z_*])$ aus f gewinnen, also auch aus g_{z_1} entlang des Weges $[z_1, z_*]$. Daher ist $g_{z_1} = g_{z_*}$ auf $U(z_1) \cap U(z_*)$. Gleichermaßen folt $g_{z_2} = g_{z_*}$ auf $U(z_2) \cap U(z_*)$. Nun folgt die Behauptung mit dem Identitätssatz.

□

15.2 Riemannsche Gebiete

Sei f eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.
Ziel ist es alle holomorphen Funktionen, die aus f durch analytische Fortsetzung entlang von in G beginnenen Wegen entstehen, zu einer einzigen, eindeutigen, holomorphen Funktion $\hat{f}$ zusammenzufassen. Dies kann offensichtlich nicht durch Funktionen erreicht werden, die auf einem Teilgebiet der komplexen Ebene definiert sind. Daher führt man eine neue Kategorie von Definitionsbereichen ein:

Die Riemannschen Gebiete oder auch konkrete Riemannsche Flächen.

Definition 15.3 (Riemannsches Gebiet)
Ein **Riemannsches Gebiet** ist ein Paar (X, p), bestehend aus einem zusammenhängenden Hausdorffraum $X \neq \varnothing$ und einer lokal topologischen Abbildung p von X nach $\mathbb{C}$.

Definition 15.4 (lokal topologisch)
Zu jedem $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U, die durch p topologisch (= homöomorph) auf eine offene Umgebung $V = p(U)$ von p_x abgebildet wird.

Sprechweisen:

- Ein Punkt $x \in X$, bzw. eine Menge $M \subset X$, liegt über dem Punkt $p_x \in \mathbb{C}$, bzw. über der Menge $p(M) \subset \mathbb{C}$.
- $U \subset X$ liegt **schlicht** über $p(U)$, wenn die Einschränkung $p_{|_U}$ injektiv ist.
- Die Faser von p über $z \in \mathbb{C}$ ist die Menge $\{x \in X \mid p(x) = z\}$. Die Fasern sind diskret.

Beispiele

1) Jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist zusammen mit $p = \mathrm{id}_G$ ein Riemannsches Gebiet.
2) Ist (X, p) ein Riemannsches Gebiet und U eine zusammenhängende, offene Teilmenge von X, so ist $\left(U, p_{|_U}\right)$ ein Riemannsches Gebiet.
3) Sei g eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, wobei g nirgends verschwindende Ableitungen habe. Dann ist (G, g) ein Riemannsches Gebiet über $g(G)$.
4) Insbesondere ist $(\mathbb{C}, \exp)$ ein Riemannsches Gebiet über $\mathbb{C}^*$.
Die Faser über $z \in \mathbb{C}^*$ besteht aus allen Logarithmen von z.
Jeder Streifen $S_k = \{w \in \mathbb{C}\colon |\Im m(w) - 2k\pi| < \pi\},\ k \in \mathbb{Z}$ liegt schlicht über $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$.

Definition 15.5 (Holomorphie)
Sei (X, p) ein Riemannsches Gebiet.

- Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn die Funktion $f \circ \left(p_{|_U}\right)^{-1}$ für jede schlichte Menge $U \subset X$ auf $p(U)$ holomorph ist.
- Ist $\left(\tilde{X}, \tilde{p}\right)$ ein weiteres Riemannsches Gebiet, so heißt eine Abbildung $\varphi\colon \tilde{X} \to X$ holomorph, falls sie stetig ist und $p \circ \varphi$ holomorph auf $\tilde{X}$.

Bemerkung 15.1
Falls X ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist und p die Identität, so erhält man den gewöhnlichen Holomorphiebegriff.

Auch hier gilt wieder der Identitätssatz.

Satz 15.3
Stimmen zwei holomorphe Abbildungen $\varphi, \psi: \tilde{X} \to X$ auf einer nicht diskreten Teilmenge $N \subset \tilde{X}$ überein, so gilt $\varphi \equiv \psi$.

Desweiteren gibt es auch auf Riemannschen Gebieten den Begriff der holomorphen bzw. analytischen Fortsetzung.

Definition 15.6
Sei f eine holomorphe FUnktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Eine analytische Fortsetung von f ist eine Riemannsches Gebiet (X, p) zusammen mit

(a) einer stetigen Abbildung $j: G \to X$ mit $p \circ j = \mathrm{id}_G$ und

(b) einer holomorphen Funktion $\hat{f}: X \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f} \circ j = f$.

Bemerkung 15.2
Man setzt nich in einen gegebenen Raum oder einer gegebenen Menge fort, vielmehr gehört der Definitionsbereich zur Fortsentzung.
Der bisherige Fall einer Fortsetzung von $f: G \to \mathbb{C}$ auf ein größeres Gebiet $\hat{G} \subset \mathbb{C}$ mit $G \subset \hat{G}$ wird aber abgedeckt: Wähle

$$(X, p) = \left(\hat{G}, \mathrm{id}\right)$$

und j die Inklusion von G in $\hat{G}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C} \\
\mathbb{C} & G \arrow[l, hook'] \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "j"']
\end{tikzcd}$$

Ein Beispiel hierfür:
Sei $(X, p) = (\mathbb{C}, \exp)$. Sei $G = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) > 0\}$ und f der Hauptzweig des Logarithmus. Man setze $f = j$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{C} \\
\mathbb{C}^* & G \arrow[l, hook'] \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

Sei nun $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Im folgenden soll eine **maximale** analytische Fortsetzung von f konstruiert werden. Dazu muss man leider etwas abstrakter werden.

Definition 15.7 (Funktionskeim)
Sei z_0 ein Punkt in einem topologischen Raum. Seien $f_1,\ f_2$ Funktionen auf Umgebungen $U_1,\ U_2$ von z_0. Die beiden Funktionen heißen äquivalent bzgl. z_0, wenn es eine Umgebung V von z_0 gibt mit $V \subset U_1 \cup U_2$ und $f_1|_V = f_2|_V$.
Ein **Funktionskeim** in z_0 ist eine Klasse dieser Äquivalenzrelation.

Definition 15.8
Der Wert $\mathbf{f}(z_0)$ eines Keimes **f** in z_0 ist der gemeinsame Wert aller Repräsentanten von **f** in z_0.

Definition 15.9
Ein Funktionskeim (Keim) **f** heißt holomorph, wenn er einen holomorphen Repräsentanten hat.

Man kann holomorphe Keime in z_0 addieren:
Sind $f\colon U_1 \to \mathbb{C}$ und $g\colon U_2 \to \mathbb{C}$ holomorphe Repräsentanten von **f** bzw. **g**, so ist $f + g$ holomorph auf $U_1 \cap U_2$. Der dazugehörige Keim **f+g** ist unabhängig von der Wahl der Repräsentaten.
Ebenso kann man holomorphe Keime auch multiplizieren. Daher bildet die Menge aller holomorpher Keime in z_0 eine $\mathbb{C}$-Algebra $\mathscr{O}_{z_0}$. Sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. In jedem Punkt $z \in G$ definiert f einen Funktionskeim $\varrho_z(f)$. Bisher wurden nur einzelne Punkte betrachtet. Im Folgenden sollen jetzt alle Punkt behandelt werden. Dazu sei $\varrho_{\mathbb{C}}$ die disjukte Vereinigung der $\mathscr{O}_z$ für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathscr{O}_{\mathbb{C}} = \dot{\bigcup_{z\in\mathbb{C}}} \mathscr{O}_z.$$

Dann ist $p\colon \mathscr{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ die Projektion *auf den Fußpunkt*

$$p(\mathbf{g}) = z \quad \text{für } \mathbf{g} \in \mathscr{O}_z.$$

Die Teile, genauer Wegkomponenten, aus diesem Raum werden später die Definitionsbereiche X für die maximale analytische Fortsetzung bilden. Daher benötigt man eine **Topologie** auf $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$:
Sei $g\colon V \to \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}$ offen, eine holomorphe Funktion. Diese bestimmt die Menge ihrer Keime

$$\sigma(g, V) = \{\varrho_z(g) \mid z \in V\} \subset \mathscr{O}_{\mathbb{C}}.$$

Man betrachte die durch die Menge $\sigma(g, V)$ erzeugte Topologie:
Eine Menge $U \subset \mathscr{O}_{\mathbb{C}}$ ist offen, wenn sie Vereinigung von Mengen $\sigma(g, V)$ ist.

Definition 15.10 (Garbe)
Die Menge $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$ mit der gegebenen Topologie und der Projektion p heißt **Garbe** der Keime holomorpher Funktionen über $\mathbb{C}$.

Eigenschafen

- $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$ ist ein Hausdorffraum.
- Für jedes $\sigma(g,V)$ ist die Einschränkung $p_{|_{\sigma(g,V)}}$ injektiv.
- p ist lokal topologisch.
- $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$ ist lokal wegzusammenhängend.
- Die Wegkomponenten von $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$ sind offen und abgeschlossen.

Man beachte, dass jede Wegkomponente von $\mathscr{O}_{\mathbb{C}}$ ein Riemannsches Gebiet ist.

Literaturverzeichnis

[FL] Wolfgang Fischer, Ingo Lieb: *Funktionentheorie - Komplexe Analysis in einer Veränderlichen*

[Fo] Otto Forster: *Analysis 1*