Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, M. Wolf

2. Übung zur Vorlesung

# Numerik 1

SS 2011

**Abgabe: Di., 03.05.2011, 18:00 Uhr, Tutorenfächer, Arnimallee 3, 1. OG**

**1. Aufgabe** (2 TP + 2 Zusatz-TP)

a) Zeigen Sie: Ein Prähilbertraum ist strikt konvex.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen strikt konvexen Raum an, der kein Prähilbertraum ist.

**2. Aufgabe** (2+2 TP)
Sei $V$ ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann heißt eine beschränkte lineare Abbildung

$$g'(u) : V \to \mathrm{R}$$

Fréchet-Ableitung von $g : V \to \mathrm{R}$ an der Stelle $u$, falls

$$\big\|g(u+v) - (g(u) + g'(u)v)\big\| = o(\|v\|) \ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Fréchet-Ableitung in $u$ eindeutig bestimmt ist.

b) Sei $V$ ein Prähilbertraum, $f \in V$, $U \subset V$ und $g : U \to \mathrm{R}$ definiert durch $g(v) = (v-f, v-f)$.
Zeigen Sie: $g'(u) = 2(u-f, \cdot)$ für alle $u \in U$.

**3. Aufgabe** (2 TP)
Beweisen Sie: „Sei $V$ ein Prähilbertraum und $P : V \to U = R(P)$ eine Orthogonalprojektion. Dann ist

$$u = Pf$$

die Bestapproximation von $f$ auf $U$.“ (vgl. **Satz 2.8** aus der Vorlesung).

**4. Aufgabe** (6 PP)
Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das die Bestapproximationsaufgabe

$$u \in \mathcal{S}_n : \|f-u\|_{L^2([0,1])} = \min$$

für die Funktionen $f_1 : [0,1] \to \mathrm{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, und $f_2 : [0,1] \to \mathrm{R}$, $x \mapsto \sin(2\pi x)$, löst. Dabei ist

$$\mathcal{S}_n = \left\{ v \in C[0,1] \middle| \; v_j|_{[x_{i-1},x_i]} \text{ affin für alle } i \right\}$$

der Raum der linearen finiten Elemente auf einem durch $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ gegebenen Gitter. Die Lösung $u \in \mathcal{S}_n$ soll als Koeffizientenvektor aus $\mathrm{R}^{n+1}$ bezüglich der Basis $\phi_i \in \mathcal{S}_n$ mit $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ dargestellt werden.

a) Schreiben Sie ferner ein Matlab-Programm, das die Approximationsfehler $\|f_k - u\|_{L^2([0,1])}$, $k = 1, 2$, exakt berechnet. Testen Sie Ihr Programm mit uniformen Gittern $x_i = \frac{i}{n}$ und mit lokal verfeinerten Gittern $x_i = \frac{i^2}{n^2}$.

b) Berechnen, plotten und vergleichen Sie für $n = 10, 100, 1000$ jeweils die Bestapproximationen und den Approximationsfehler.