Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

3. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2011

Abgabe: Dienstag, 10. Mai, 18.00 Uhr

1. Aufgabe (3 TP)
Zeigen Sie, dass die Gramsche Matrix $A = ((\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1,\dots,n}$ positiv definit ist.

2. Aufgabe (6 TP + 2 Zusatzpunkte)
Wir betrachte die stückweise linearen finiten Elemente S_n bezüglich eines äquidistanten Gitters $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$ mit der Knotenbasis $\varphi_j \in S_n$, definiert durch $\varphi_j(x_i) = \delta_{i,j}$.

a) Ist die Knotenbasis orthogonal? Falls nicht, geben sie eine 3-Term-Rekursion zur Orthogonalisierung der Knotenbasis an.

b) Welchen Träger haben die resultierenden Basisfunktionen?

c) Berechnen Sie mit dem Verfahren aus Teil a) eine Orthogonalbasis von S_n für $n = 3$.

d) Geben Sie eine Orthogonalbasis von S_n für beliebiges n an. (Zusatzaufgabe)

3. Aufgabe (3 TP + 3 PP)

a) Berechnen Sie die Haar-Wavelet-Transformation von $f(x) = \sin(\pi i x)$, $i \in \mathbb{N}$.

b) Gegeben sei das Signal $f(x) = \sum_{i=2}^{64} 2x^2 \sin(\pi i x)$.
Berechnen Sie für $n = 1, 3, 5$ die Haar-Wavelet-Approximation von f

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \psi_{k,j})\psi_{k,j}$$

und stellen sie die Ergebnisse zusammen mit f grafisch dar.