Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

10. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2011

Abgabe: Dienstag, 28. Juni, 18.00 Uhr

1. Aufgabe (2 TP)
Beweisen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in (0,1], \quad x(0) = x_0,$$

für global Lipschitz-stetiges $f : R^d \to R^d$ reversibel ist.

2. Aufgabe (4 TP)
Betrachten Sie die beiden linearen Anfangswertprobleme

$$y'(t) = py(t) - ky(t)^2, \quad y(0) = y_0,$$

und

$$mx''(t) = -Dx(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

für $p, k, m, D > 0$. Berechnen Sie für diese beiden Probleme jeweils die Wronski-Matrix $W(t)$ und damit eine Abschätzung der punktweisen Kondition $\kappa(t)$ in der $\|\cdot\|_1$-Norm. Stellen Sie ferner die zur Wronski-Matrix gehörige Differentialgleichung auf und zeigen Sie, dass $W(t)$ eine Lösung derselben ist.

Tip: Benutzen Sie $y(t) = \frac{y_0 p e^{tp}}{p - ky_0(1-e^{tp})}$.

3. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes die folgende Aussage:
Sei $f : R^d \to R^d$ Lipschitz-stetig. Dann existiert für jedes genügend kleine $T > 0$ und jedes $x_0 \in R^d$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in C^1([0,T])$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in (0,T], \quad x(0) = x_0.$$

4. Aufgabe (6 Zusatz-TP)
Stellen Sie sich vor, Sie sitzen in einer vollen Badewanne mit V_0 Litern Inhalt.Die Wassertemperatur Θ_0 ist Ihnen zu niedrig. Darum drehen Sie den Wasserhahn auf und lassen f Liter/Sekunde Wasser der Temperatur $\Theta_1 > \Theta_0$ einlaufen.Da die Wanne voll ist, läuft die gleiche Menge Wasser zum Überlauf hinaus. Durch geeignete Maßnahmen gelingt es Ihnen dass heiße Wasser schnell zu verteilen (Durchmischungshypothese).

a) Verifizieren Sie analog zu den in der Vorlesung gegebenen Einführungsbeispielen, dass das Anfangswertproblem

$$\Theta'(t) = \frac{f}{V_0}(\Theta_1 - \Theta(t)), \quad \Theta(0) = \Theta_0,$$

die zeitliche Entwicklung der Wassertemperatur $\Theta(t)$ beschreibt.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

c) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung die stationäre Lösung

$$\Theta_{\text{stat}}(t) = \Theta_1$$

besitzt.

d) Zeigen Sie, dass für jedes Θ_0 gilt

$$\lim_{t\to\infty} \Theta(t) = \Theta_1.$$

e) Wie lange müssen Sie im Falle $V_0 = 150l$, $\Theta_0 = 30°C$, $f = 0.1l/s$ und $\Theta_1 = 60°C$ warten bis $38°C$ erreicht sind?