Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

11. Übung zur Vorlesung

# Numerik 1

SS 2011

**Abgabe: Dienstag, 5. Juli, 18.00 Uhr**

**1. Aufgabe** (4 Zusatz-TP)
Beweisen Sie die folgende Aussage:
Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $\Phi^t x$ stetig auf $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ für alle $T > 0$.

**2. Aufgabe** (4 TP)

a) Geben Sie ein implizites Runge-Kutta-Verfahren 1-ter Stufe mit Konsistenzordnung $p = 2$ an.

b) Ist das Verfahren zur Approximation von

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad t \in (0,1], \quad x(0) = 1$$

immer durchführbar?
Falls nicht, geben Sie eine Bedingung für die Durchführbarkeit an.

**3. Aufgabe** (4 TP)
Entwickeln Sie mit Hilfe der Taylor-Methode ein Verfahren 4-ter Ordnung zur Approximation von

$$x'(t) = x(t)^2, \quad t \in (0,T], \quad x(0) = x_0.$$

**4. Aufgabe** (6 Zusatz-PP)
Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm `function [x, t, c] = RungeKuttaEx(f, x0, I, tau, b, A)`, das ein explizites Runge-Kutta-Verfahren, welches durch `b` und `A` aus dem Butcher-Scheme gegeben ist, für die rechte Seite `f`, den Startwert `x0` und die Schrittweite

`tau` im Intervall `[I(1),I(2)]` durchführt.
Der Rückgabewert `x` soll die Lösung und `t` die Zeitpunkte als Vektor enthalten, `c` soll die Anzahl der durchgeführten Funktionsauswertungen sein.
Testen Sie ihr Programm mit dem Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{\gamma}{1 + \tan^2(x(t))}, \quad t \in (0, 2], \quad x(0) = -\frac{\pi}{4},$$

indem Sie das explizite Euler-Verfahren, das Verfahren von Runge und Runge-Kutta-4-Verfahren wie folgt anwenden:

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung und plotten Sie diese im Vergleich zu den Lösungen der Verfahren für $\gamma = 100$ und $\tau = 2^{-3}, \dots, 2^{-8}$.

b) Berechnen Sie für $\gamma = 1, 10, 100, 1000$ jeweils die Fehler

$$e(\tau) = \max_k |x(t_k) - x_k|$$

für $\tau = 2^{-3}, \dots, 2^{-8}$ und plotten Sie diese in einer doppelt logarithmischen Skala für jedes Verfahren über der Anzahl der $f$-Auswertungen.

c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.