Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

4. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2011

Abgabe: Dienstag, 17. Mai, 18.00 Uhr

1. Aufgabe (3 TP)
Zeigen Sie:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n = 0, 1, \ldots$$

ist ein Polynom n-ter Ordnung.

2. Aufgabe (4 TP + 2 PP)
Anhand der folgenden Daten (Datei `demographie.txt` auf der Homepage) soll eine Schätzung für das Bevölkerungswachstum (in %) im Jahr 2011 auf Grundlage der Sterberate (Todesfälle pro 1000 Einwohner), der Migrationsrate (Netto-Zuwanderung pro 1000 Einwohner) und der Fruchtbarkeitsrate (Kinder pro Frau) entwickelt werden.

Land	Wachstum	Sterberate	Migration	Fruchtbarkeit
China	0.606	7.0	−0.39	1.75
Deutschland	−0.033	10.71	2.18	1.4
Japan	−0.088	8.98	0.0	1.23
Kamerun	2.241	12.66	0.0	4.49
Marokko	1.528	5.54	−0.82	2.62
Mozambique	1.803	20.51	0.0	5.29
Nigeria	2.898	20.59	−0.59	7.37
Spanien	0.116	9.81	0.99	1.29
Südafrika	−0.46	22.45	−0.08	2.16
Türkei	1.04	6.0	0.0	1.89
Ukraine	−0.675	16.07	−0.13	1.24
USA	0.894	8.26	3.05	2.09
Vietnam	1.004	6.19	−0.4	1.89

a) Erstellen Sie dazu eine lineare Ausgleichsebene der Form

$$\varphi(a, x) = x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.
Das entstehende lineare Gleichungssystem dürfen Sie dabei nicht mit dem `matlab`-Operator \ lösen; verwenden Sie statt dessen ein Verfahren zum lösen solcher Gleichungssysteme, das sie hierfür für geeignet halten (es kann von ihnen selbst geschrieben oder bereits in `matlab` implementiert sein). Begründen sie ihre Wahl.

b) Geben sie eine Schätzung für das Bevölkerungswachstum in Parkistan an.

Land	Wachstum	Sterberate	Migration	Fruchtbarkeit
Parkistan	???	8	-1.24	3.71

3. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, deren betragsmäßig gröster bzw. kleinster Eigenwert mit $\lambda_{\max}(A)$ bzw. $\lambda_{\min}(A)$ bezeichnet wird:

a) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$.

b) Falls A invertierbar und symmetrisch ist, gilt $\kappa_2(A) = |\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}|$.

4. Aufgabe (4 TP)
Zeigen Sie:

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m \geq n$, und $QR = A$ eine QR-Zerlegung von A, wobei A vollen Rang habe. Dann bilden die ersten n Spalten von Q eine Orthonormalbasis des Bildes $R(A)$ von A.

b) Die Householder-Reflexionen sind Orthogonaltransformationen.