Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

5. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2011

Abgabe: Dienstag, 24. Mai, 18.00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
$\Lambda_n(K, I)$ bezeichne die Lebesgue-Konstante bezüglich der Knotenmenge K auf dem Intervall I.

a) Seien $K = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset I = [a, b]$ paarweise verschiedene Knoten. Die Affintransformation
$$\chi : I \to I_0 = [-1, 1], \quad t \mapsto \frac{2t - a - b}{b - a}$$
dieses Intervalls auf das Einheitsintervall I_0 bilde die Knotenmenge K auf die Knotenmenge $K_0 = \chi(K)$ ab. Zeigen Sie, dass die Lebesgue-Konstante invariant unter dieser Transformation ist, d.h.
$$\Lambda_n(K, I) = \Lambda_n(K_0, I).$$

b) Seien $K = \{t_0, \ldots, t_n\}$ mit $a \leq t_0 < \ldots < t_n \leq b$ Knoten im Intervall $I = [a, b]$. Geben Sie die Affintransformation $\chi : [t_0, t_n] \to I$ auf I an, so dass für $\bar{K} = \chi(K) = \{\bar{t}_0, \ldots, \bar{t}_n\}$ gilt
$$a = \bar{t}_0 < \ldots < \bar{t}_n = b.$$
Zeigen Sie
$$\Lambda_n(\bar{K}, I) \leq \Lambda_n(K, I),$$
d.h. die Einbeziehung der Randknoten verbessert die Lebesgue-Konstante.

2. Aufgabe (6 PP)

a) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Funktion `function v = AitkenNeville(x,fx,u)`. Sie soll zu gegebenen Funktionswerten fx an den Stützstellen x den Funktionswert des Interpolationspolynoms $p(u)$ an einem bestimmten Punkt u berechnen. Hierzu soll das aus der `CoMa` bekannte Schema von Aitken-Neville verwendet werden.

b) Erzeugen Sie ein MATLAB-Programm `function[ ] = Interpolation(x,f,g)`. Dieses soll das Interpolationspolynom zu einer gegebenen Funktion $f \in C[a,b]$ berechnen, die Interpolation erfolgt an den Stützstellen in dem Vektor x. Der Vektor g enthält die Gitterknoten, an welchen das Interpolationspolynom für den Plot berechnet werden soll. Plotten Sie zum Vergleich des Ergebnisses auch die ursprüngliche Funktion f. Die Funktion `AitkenNeville` kann und soll hierbei benutzt werden.

c) Testen Sie ihr Programm an den Funktionen

$$f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = \arctan(x)$$

auf dem Intervall $[-5,5]$. Verwenden Sie dazu zunächst n äquidistante Stützstellen, danach n Tschebyscheff-Knoten ($n = 5, 25, 125$) und interpretieren Sie das Konvergenzverhalten.

3. Aufgabe (4 TP)

Bestimmen Sie die Hermite-Interpolierte $p \in \mathcal{P}_4$ zu den Hermite-Interpolationsbedingungen

$$\begin{aligned} p(0) &= 1 \\ p(1) &= 0, \quad p'(1) = 1, \quad p''(1) = 0 \\ p(2) &= 1. \end{aligned}$$

4. Aufgabe (2 TP + 2 Zusatzpunkte)

Betrachte die Funtionenklasse

$$\mathcal{F} = \{f^{n+1}[-1,1] : \|f^{(n+1)}\|_\infty \leq (n+1)!\}.$$

Für $f \in \mathcal{F}$ bezeichne $p_n(f)$ das Interpolationspolynom n-ten Grades zu den Knoten $K = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [-1,1]$.

a) Zeigen Sie

$$\varepsilon_n(K) = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f - p_n(f)\|_\infty = \|\omega_{n+1}\|_\infty, \quad \omega_{n+1}(t) = (t-t_0)\dots(t-t_n).$$

b) Zeigen Sie $\varepsilon_n(K) \geq 2^{-n}$ und dass Gleichheit genau dann gilt, wenn K die Menge der Tschebyscheff-Knoten ist, d.h.

$$t_j = \cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi, \quad j = 0, \dots, n.$$