Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

6. Übung zur Vorlesung

# Numerik 1

SS 2011

**Abgabe: Dienstag, 31. Mai, 18.00 Uhr**

**1. Aufgabe** (3 TP + 1 PP)
Interpolieren Sie die Funktion

$$f(x) = \sin(x)$$

auf dem Intervall $[-5, 5]$ jeweils in ($n = 10, 50, 70$) äquidistanten und Tschebyscheff Stützstellen.
Was erwarten Sie? Was beobachten Sie? Wie lassen sich die numerischen Resultate erklären?

**2. Aufgabe** (4 TP)
Sei $S^m_\Delta$ der Raum der Splines $m$-ter Ordnung zum Gitter $\Delta = \{t_0, \dots, t_n\}$.
Zeigen Sie

$$\dim S^m_\Delta = n + m.$$

**3. Aufgabe** (5 TP)
Es sei $S^3_\Delta$ der Raum aller kubischen Splinefunktionen mit natürlichen Randbedingungen zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

a) Welche der folgenden Funktionen sind aus $S^3_\Delta$?
   a) $f(x) = x^3 - x^2$
   b) $f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3$
   c) $f(x) = \max\{0, (x-1)^3\} - \frac{1}{2}x^3$

b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s_2 \in S^3_\Delta$ zu $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s_2''(x_0) = f''(x_0)$, $s_2''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?

**4. Aufgabe** (5 Zusatz-PP)
In dieser Aufgabe soll mit Hilfe eines MATLAB-Programms eine kubische Spline-Interpolation realisiert werden.
Betrachten Sie die Funktion $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{2}\sin(4t))\cos(t)) \\ (1 - \frac{1}{2}\sin(4t))\sin(t)) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die kubische Spline-Interpolation von $\gamma$ zu dem Gitter $\Delta = \{t_o, \ldots, t_n\} \subset [0, 2\pi]$ für $t_i = \frac{i}{n} \cdot 2\pi$. Plotten Sie für $n = 10, 25, 50$ die jeweiligen Ergebnisse im Vergleich zu dem Graphen von $\gamma$ in $\mathbb{R}^2$.