Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

7. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2011

Abgabe: Dienstag, 7. Juni, 18.00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Zeigen Sie:
Die Monome und die abgebrochenen Potenzen

$$(x - x_i)_+^k = \begin{cases} (x - x_i)^k, & \text{falls } x \geq x_i \\ 0, & \text{falls } x < x_i \end{cases}$$

bilden eine Basis

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}, (x - x_1)_+^{k-1}, \ldots, (x - x_l)_+^{k-1}\}$$

des Spline-Raumes S_Δ^k. Insbesondere gilt $\dim S_\Delta^k = k + l$.

2. Aufgabe (3 TP)
Wir betrachten die Approximation der Funktion $f \in C[a, b]$ zu den Stützstellen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$w(x) = \frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx \quad \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}),$$

wobei $h = \max_{i=1,\ldots,n} h_i$ und $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ ist.
Zeigen Sie:

a) Es gilt $\|f - w\|_2 \to 0$ für $h \to 0$.

b) Falls f Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ ist, gilt sogar $\|f - w\|_2 = \mathcal{O}(h)$ für $f \to 0$.

3. Aufgabe (4 TP)
Begründen Sie, warum alle Polynome p vom Grad ≤ 3 mit

$$p\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = y_0, \qquad p\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y_1,$$

wobei y_0, y_1 beliebige gegebene reelle Zahlen sind, den gleichen Integralwert

$$\int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

besitzen, und geben Sie diesen Wert in Abhängigkeit von y_0 und y_1 an.

4. Aufgabe (2 Zusatz-TP + 4 Zusatz-PP)
Neben den Quadraturverfahren, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben, gibt es noch einen wahrscheinlichkeitstheoretisch orientierten Ansatz, die sogenannten *Monte-Carlo-Methoden*. Dabei bestimmt man den Wert eines Integrals

$$I(f) = \int_a^b f(x)\;dx$$

als Mittelwert

$$I_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

über die Werte von f an zufällig ausgewählten Stützstellen $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$.

a) Zeigen Sie mithilfe des starken Gesetzes der großen Zahl, dass

$$P\left(\lim_{n\to\infty} I_n(f) = I(f)\right) = 1\ .$$

b) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm `kugel(n,k)` zur Bestimmung des Volumens der n-dimensionalen Einheitskugel bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm. Erzeugen Sie dazu eine Folge von k Zufallsvektoren in $[-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Testen Sie Ihr Programm an der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Was fällt auf, wenn Sie das Programm mehrfach hintereinander aufrufen?