Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

8. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2011

Abgabe: Dienstag, 14. Juni, 18.00 Uhr

1. Aufgabe (2 TP + 4 PP)

a) Die Verwendung der Gauß-Legendre-Quadratur (Gauß-Christoffel mit $\omega = 1$) auf einzelnen Teilintervallen ergibt die Quadraturformel aus Lemma 4.3. Die zur Auswertung notwendigen Nullstellen der Legendre-Polynome p_{n+1} sind:

- für $n = 0$: 0
- für $n = 1$: $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$
- für $n = 2$: 0, $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$
- für $n = 3$: $\pm\sqrt{\frac{15\pm 2\sqrt{30}}{35}}$

Berechnen Sie die zugehörigen Gewichte.

b) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm `function int = gaussLegendreQuad(f,n,I,m)`, das den Wert `int` des Intergrals über die Funktion `f` auf dem Intervall `I` = [a,b] unter Verwendung der summierten Gauß-Legendre-Quadratur vom Grad `n` (für $0 \le n \le 3$) bei Unterteilung von `I` in `m` Teilintervalle berechnet.
Testen Sie ihr Programm, indem Sie für $n = 0, 1, 2, 3$ die Integrale

$$S_1 = \int_0^1 \frac{(2\gamma+1)\pi}{2}\sin((2\gamma+1)\pi x))dx \quad S_2 = \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{2\arctan(\gamma)}\frac{1}{1+(\gamma x)^2}dx$$

für $\gamma = 1$ und $\gamma = 10$ berechnen. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

2. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie Satz 4.8 im Skript.

3. Aufgabe (3 TP)
Als Verfahren $D(h)$ zur Berechnung der Ableitung $f'(x)$ sei der symmetrische Differenzenquotient

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

gegeben. Bestimmen Sie die asymptotische Entwicklung des Fehlers in h. Mit welcher anderen Reihe hängt die asymptotische Entwicklung in diesem Fall eng zusammen? Ist das immer so?

4. Aufgabe (4 TP)
Führen Sie mit Hilfe des Aitken-Neville Tableaus eine Romberg-Quadratur ausgehend von der summierten Trapezregel für das Integral

$$\int_0^1 t^5 dt$$

bei Benutzung der Schrittweiten $h_0 = 1$, $h_1 = 0.5$ und $h_2 = 0.25$ durch.