

9. Übung zur Vorlesung
NUMERIK 1
SS 2011

Abgabe: Dienstag, 21. Juni, 18.00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)

Die Saturationsbedingung für Simpson-Regel $S_{V_k^{(j)}}$ und Trapez-Regel $T_{V_k^{(j)}}$ zur Approximation des Integrals $I_{V_k^{(j)}}$ einer Funktion f über einem Intervall $V_k^{(j)} = [z_{k-1}^{(j)}, z_k^{(j)}]$ ist erfüllt, wenn ein $q \in [0, 1)$ existiert mit

$$|I_{V_k^{(j)}}(f) - S_{V_k^{(j)}}(f)| \leq q |I_{V_k^{(j)}}(f) - T_{V_k^{(j)}}(f)|.$$

- a) Geben Sie ein Beispiel an, für das die Saturationsbedingung nicht erfüllt ist.
- b) Geben Sie ein Beispiel an, für das die Saturationsbedingung mit $q \in \mathcal{O}(h^2)$ und $h = \text{diam}(V_k^{(j)})$ erfüllt ist.

2. Aufgabe (6 PP)

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `function [int, z, nhist, ihist, ehist] = AdaptQuad(f, z0, Tol, max)`, das den Wert des Integrals über die Funktion f auf dem Intervall $I = [a, b]$ unter Verwendung der adaptiven Multilevel-Quadratur berechnet. Die Quadratur selbst soll mithilfe der summierten Trapezregel erfolgen, zur lokalen und globalen Fehlerschätzung ist die Simpsonregel zu verwenden.

Dabei sei das Ausgangsgitter durch einen Vektor \mathbf{z}_0 mit $\mathbf{z}_0(1) = a$ und $\mathbf{z}_0(\text{end}) = b$ gegeben. Es sollen jeweils die Intervalle, die den maximalen Fehler aufweisen, halbiert werden, bis der geschätzte globale Fehler kleiner als 0.5Tol oder die Anzahl der Stützstellen größer als `max` ist. Für jedes neue Gitter soll f nur an den neuen Stützstellen ausgewertet werden.

Der Rückgabewert `int` soll der Wert der Quadratur und `z` der Vektor der Stützstellen auf dem feinsten Gitter sein. Die Vektoren `nhist`, `ihist` und `ehist` sollen für jedes Gitter die Anzahl der Stützstellen, den Wert der Quadratur und den geschätzten globalen Fehler enthalten.

Testen Sie Ihr Programm für Startgitter mit $n = 2, 11, 101$ Stützstellen mit $\text{To1} = 10^{-10}$ und $\text{max} = 1000$ mit den Funktionen

$$S_1 = \int_0^1 \frac{(2\gamma + 1)\pi}{2} \sin((2\gamma + 1)\pi x) dx, \quad S_2 = \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{2 \arctan(\gamma)} \frac{1}{1 + (\gamma x)^2} dx, \quad \gamma = 1, 10$$

Plotten Sie jeweils den geschätzten und den exakten Fehler über der Anzahl der Stützstellen, stellen Sie das jeweils feinste Gitter dar und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

3. Aufgabe (2 TP)

Sei $y : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \in (T_0, T_1], \quad y(T_0) = y_0. \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass sich dieses nicht-autonome Anfangswertproblem autonomisieren lässt, indem Sie ein $x : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ sowie eine Funktion f und einen Startwert x_0 konstruieren, so dass folgendes gilt: x ist genau dann Lösung des autonomen Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in (T_0, T_1], \quad x(T_0) = x_0,$$

wenn y eine Lösung von (1) ist.

4. Aufgabe (6 TP)

a) Untersuchen Sie die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = -x^p, \quad x(0) = x_0$$

in Abhängigkeit von $p \in \mathbb{R}$ auf Existenz und Eindeutigkeit und geben Sie die Lösung explizit an.

b) Gegeben sei eine lokal Lipschitz-stetige rechte Seite $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$. Die offene Menge $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ wird üblicherweise als *Phasen-* oder *Zustandsraum* bezeichnet, während man $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega_0$ den *erweiterten Phasenraum* nennt.

Eine Lösung $x \in C^1([T_0, T_1], \mathbb{R}^d)$, $T_1 > 0 \geq T_0$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ heiÙe in der Zukunft *bis an den Rand des erweiterten Phasenraumes* Ω *fortsetzbar*, wenn es eine Fortsetzung $x^* \in C^1([T_0, T_+], \mathbb{R}^d)$ der Abbildung x mit $T_1 \leq T_+ \leq \infty$ gibt, so dass die Abbildung x^* ihrerseits Lösung ist und einer der drei folgenden Fälle vorliegt:

- $T_+ = \infty$,
- $T_+ < \infty$ und $\lim_{t \uparrow T_+} |x^*(t)| = \infty$,
- $T_+ < \infty$ und $\lim_{t \uparrow T_+} \text{dist}((t, x^*(t)), \partial\Omega) = 0$.

Geben Sie für jeden der drei Fälle ein Beispiel mit Begründung an.