Übungsblatt 3 zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2012

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutor: Frederik Garbe

http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/lina2012
http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraII.php

Abgabe bis spätestens 07. Mai 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 04. Mai 2012 in Frederiks Fach, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. *[4 Punkte] Kommutative Matrizen*

Sei U ein Unterraum von $\mathrm{Mat}(n \times n; K)$ mit den Eigenschaften:

- $A, B \in U \Rightarrow AB = BA$
- $A \in U \Rightarrow A$ *ist diagonalisierbar*

Dann ist U höchstens n-dimensional.
Preisfrage: Ist die zweite Eigenschaft notwendig? (mit Beweis)

Aufgabe 2. *[4 Punkte] Lineare Rekursion*

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellte lineare Abbildung. Mit Hilfe von f wird wie folgt eine rekursive Folge von Vektoren definiert:

$$v_0 = {}^t(0,1) \quad \textit{und} \qquad\qquad v_{n+1} = A \cdot v_n \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Berechnen Sie die ersten zehn Glieder dieser Folge.

(ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung f, und zeigen Sie hiermit, dass A diagonalisierbar ist.

(iii) Berechnen Sie $D := SAS^{-1}$ für eine Matrix S^{-1}, deren Spalten die Eigenvektoren von f sind.

(iv) Benutzen Sie Teil iii), um die Matrizen A^n und die Vektoren v_n in Abhängigkeit von n direkt (d.h. nicht rekursiv) zu bestimmen.

Aufgabe 3. *[4 Punkte] Diagonalisierbarkeit*

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ *ist die Matrix*

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

Aufgabe 4. *[4 Punkte] Diagonalisierbarkeit*

Welche der folgenden beiden Matrizen sind über dem Körper $\mathbb{R}$ *diagonalisierbar? (Beweisen Sie!)*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -5 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ *und* $p(\frac{a}{b}) = 0$, *dann gilt* $a | a_0$ *und* $b | a_n$. *Das darf benutzt werden.*