Übungsblatt 4 zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2012

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutor: Frederik Garbe

http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/lina2012
http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraII.php

Abgabe bis spätestens 14. Mai 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 11. Mai 2012 in Frederiks Fach, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. *[4 Punkte] Nilpotente Endomorphismen*

Nilpotente Endomorphismen sind für die einfache *Darstellung von Endomorphismen von größter Wichtigkeit. Deshalb ein paar Überlegungen zu diesem Thema.*

Im Folgenden sei der Index $\iota(N)$ für einen nilpotenten Endomorphismus definiert durch

$$\iota(N) = \min\left\{k \in \mathbb{N} : N^k = 0\right\}.$$

Seien N_1 und N_2 zwei nilpotente Endomorphismen.

(i) Es muss nicht notwendigerweise $N_1 + N_2$ nilpotent sein.

(ii) Kommutieren N_1 und N_2, dann ist $N_1 + N_2$ nilpotent und es ist

$$\iota(N_1 + N_2) \leq \iota(N_1) + \iota(N_2)$$

Freiwillige Zusatzaufgabe: Gilt auch

$$\iota(N_1 + n_2) \leq \max\left\{\iota(N_1), \iota(N_2)\right\}?$$

Aufgabe 2. *[4 Punkte] Charakeristisches Polynom*

Das charakteristische Polynom gibt wesentliche Informationen darüber wie einfach *ein Endomorphismus ist.*

Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ normiert. Zeigen Sie, dass es einen Endomorphismus A mit $P_A(t) = \pm f(t)$ gibt.

Aufgabe 3. *[4 Punkte] Linearfaktoren des charakteristischen Polynoms*

Noch eine Aufgabe zur Zerlegbarkeit des charakteristischen Polynoms in Linearfaktoren, diesmal über endlichen Körpern. Dies beantwortet auch die Frage, ob es eine Primzahl p gibt, so dass gilt $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ (algebraischer Abschluss von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Zu jeder Primzahl p existiert ein Polynom über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, das keine Nullstelle in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat.

Aufgabe 4. *[4 Punkte] Zum Beweis über die Jordan-Zerlegung*

Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die n_i an, so dass die folgende Aufgabe lösbar ist. Sei K ein Körper und $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ eine Folge natürlicher Zahlen. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Endomorphismus $A : K^n \to K^n$ gibt, so dass für $i \geq 1$ gilt

$$\dim \ker A^i = n_{\min\{i,k\}}.$$