Übungsblatt 5 zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2012

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutor: Frederik Garbe

http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/lina2012
http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraII.php

Abgabe bis spätestens 21. Mai 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 18. Mai 2012 in Frederiks Fach, am Montag nur vor der Vorlesung.

Definition 1. *Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom aus $K[x]$ über K ganz in Linearfaktoren zerfällt.*

Definition 2. *Für eine nichtleere Teilmenge A eines Ringes R besteht (A) aus allen endlichen Summen von Elementen der Form na, xa, ay, xay mit $a \in A$, $x, y \in R$ und $n \in \mathbb{Z}$.*

Aufgabe 1. *[4 Punkte] Zentralisator*

Sei K algebraisch abgeschlossen und $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$. Betrachten Sie den Zentralisator von Z_A von A:

$$Z_A = \{B \in \mathrm{Mat}(n; K) : AB = BA\}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\dim Z_A \geq n.$$

Aufgabe 2. *[4 Punkte] Ideale und Hauptideale*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Hauptideale sind, mit Beweis.

(i) c_0 *in dem Ring aller Folgen.*

(ii) c_0 *in dem Ring der beschränkten Folgen.*

(iii) $(2, x)$ *in* $\mathbb{Z}[x]$ *(siehe Definition 2, mit* $A = \{2, x\}$*)*

Aufgabe 3. *[4 Punkte] Diagonalisierbarkeit*

Sei K algebraisch abgeschlossen mit $\mathrm{char} K = 0$ *und* $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$ *mit*

$$A^m = E_n \qquad \textit{für ein } m \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und finden Sie Bedingungen an die Eigenwerte von A.

Aufgabe 4. *[4 Punkte] Ideale und Hauptideale*

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^n$ *mit der punktweisen Multiplikation als Ring.*

(i) *Wie viele verschiedene Hauptideale gibt es?*

(ii) *Wie viele verschiedene Ideale gibt es?*