Übungsblatt 7 zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2012

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutor: Frederik Garbe

http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/lina2012
http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraII.php

Abgabe bis spätestens 4. Juni 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 1. Juni 2012 in Frederiks Fach, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. *[4 Punkte] Prähilbertraum*

Zeigen Sie, dass für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ *folgende Aussagen äquivalent sind:*

(i) X *ist Prähilbertraum, d.h.* $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$ *für ein geeignetes Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

(ii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *für alle* $x, y \in X$.

Aufgabe 2. *[4 Punkte] Vektorprodukt*

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, *dann gilt:*

$$x, y, z \text{ sind linear unabhängig} \Leftrightarrow x \times y, y \times z, z \times x \text{ sind linear unabhängig.}$$

Aufgabe 3. *[4 Punkte] Skalarprodukt*

Sei $A \in \mathrm{M}(n; \mathbb{R})$. *Für* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *definieren wir:*

$$(x, y)_A := {}^t x \cdot A \cdot y.$$

Welche der Eigenschaften 1. - 3. aus 5.1.1 werden von $(\cdot,\cdot)_A$ *erfüllt? Geben Sie für die Eigenschaften, die nicht für jedes* A *gelten, konkrete Beispiele für* A *an, die dies zeigen.*

Aufgabe 4. *[4 Punkte] Geraden*

(i) Sei $g = v + \mathbb{R} \cdot w$ *eine Gerade in* $\mathbb{R}^2$ *(d.h.* $v, w \in \mathbb{R}^2, w \neq 0$*). Wir nennen* $y \in \mathbb{R}^2$ *orthogonal zu* g *(*$y \perp g$*), falls* $y \perp (x - x')$ *für alle* $x, x' \in g$ *gilt. Zeigen Sie:*

$$y \perp g \Leftrightarrow y \perp w.$$

(ii) $g \subset \mathbb{R}^2$ *ist Gerade genau dann, wenn es ein* $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *und ein* $b \in \mathbb{R}$ *gibt, mit*

$$g = \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle a, y\rangle = b\}.$$

(iii) Sei $g = v + \mathbb{R}w$ *wie in i), und sei* $u \in \mathbb{R}^2$. *Dann gibt es genau ein* $x^* \in g$ *mit*

$$\|x^* - u\| = \min\{\|x - u\| : x \in g\}.$$