

Übungsblatt 10 zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2012

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends

Assistent: Patrik Marschalik

Tutor: Frederik Garbe

<http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/lina2012>

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraII.php

Abgabe bis spätestens 25. Juni 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 22. Juni 2012 in Frederiks Fach, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. [4 Punkte] Orthogonales Komplement

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für $U, W \subset V$ gilt:

(i) $U^{\perp\perp} = U$

(ii) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$

(iii) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

Aufgabe 2. [4 Punkte] Orthogonale Endomorphismen

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}V$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist orthogonal bzw. unitär

(ii) für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} von V ist $f(\mathcal{B})$ Orthonormalbasis

(iii) für mindestens eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V ist $f(\mathcal{B})$ Orthonormalbasis.

Aufgabe 3. [4 Punkte] Drehungen

Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$ und

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Finden Sie ein unitäres U mit

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. [4 Punkte] Orthogonale und unitäre Abbildungen

Sei

$$A = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie

(i) ein unitäres U , so dass $U^{-1}AU$ diagonal ist

(ii) ein orthogonales T , so dass für ein $\alpha \in [0, 2\pi]$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$