Übungsblatt 11 zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2012

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutor: Frederik Garbe

http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/lina2012
http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraII.php

Abgabe bis spätestens 01. Juli 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 29. Juni 2012 in Frederiks Fach, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. *[4 Punkte] Selbstadjungierte, nilpotente Endomorphismen*

Sei $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $F = 0$ ist.

Aufgabe 2. *[4 Punkte] Selbstadjungierte Endomorphismen*

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix $S \in \mathcal{O}(3)$, so dass ${}^tSAS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3. *[4 Punkte] Anti-selbstadjungierte Endomorphismen*

Ein Endomorphismus F eines endlichdimensionalen euklidischen oder unitären Vektorraumes V heißt anti-selbstadjungiert, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle F(v), w\rangle = -\langle v, F(w)\rangle.$$

Sei nun V ein euklidischer endlichdimensionaler Vektorraum und F ein Endomorphismus von V.

(i) Zeigen Sie, dass F genau dann anti-selbstadjungiert ist, wenn $\langle F(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$ gilt.

(ii) Ist F anti-selbstadjungiert und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von F, so folgt $\lambda = 0$.

Aufgabe 4. *[4 Punkte] Rayleigh-Quotient*

Sei φ ein selbstadjungierter Endomorphismus auf einem n-dimensionalen Vektorraum V und $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ seien die Eigenwerte. Zeigen Sie,

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \subset X \\ \dim F = k}} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle \varphi(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$