Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei A eine $n \times m$-Matrix. Die Matrix A^T ist die $m \times n$-Matrix, die durch Vertauschen der Zeilen und Spalten aus A hervorgeht (d.h.: aus Zeilen werden Spalten, und umgekehrt). Die Matrix A^T heißt *transponierte Matrix* von A. Zeigen Sie, dass für $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $(AB)^T = B^T A^T$ gilt.
Lösung
Gegeben:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Zeige:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

AB ist eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen c_{ij}. Für diese gilt:

$$(AB)_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \qquad \text{(Definition der Matrix-Matrix-Multiplikation)}$$

Damit läßt sich die Aufgabe durch einfaches Rechnen zeigen:

$$(AB)^T = (c_{ij})^T = (c_{ji}) = (\sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki}) = (\sum_{k=1}^{m} b_{ki} a_{jk}) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m b_{k1} a_{1k} & \dots & \sum_{k=1}^m b_{k1} a_{nk} \\ \vdots & & \ddots \\ \sum_{k=1}^m b_{kn} a_{1k} & \dots & \sum_{k=1}^m b_{kn} a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{m1} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{1n} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}^T = B^T A^T.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei A eine $n \times n$-matrix und b ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$, für eine natürliche Zahl n.

a) Wieviele Additionen/Subtraktionen brauchen Sie maximal, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Gauss-Elimination zu lösen?
Hinweis: $\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{1}{3} n(n^2 - 1)$.
Lösung:
Betrachten Sie die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

In der ersten Spalte sind $n-1$ Einträge zu eliminieren. Jeder Eintrag kostet $n+1$ Additionen/Subtraktionen. Mithilfe von $(n+1)(n-1)$ Subt. und Add. erreichen Sie also den Zustand

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * & * \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\tilde{a}_{22}$, $\tilde{a}_{23}$ etc. die neuen Werte in der zweiten Zeile der Matrix. In der zweiten Spalte sind jetzt $n-2$ Einträge zu eliminieren. Zur Elimination eines jeden dieser Einträge brauchen Sie n Add./Sub. Sie brauchen also weitere $n(n-2)$ Additionen/Subtraktionen, um zum Zustand

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * \end{pmatrix}$$

zu kommen. Mit weiteren

$$(n-1)(n-3) + (n-2)(n-4) + ... + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1$$

Additionen/Subtraktionen erreichen Sie die obere Dreiecksform

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \tilde{a}_{(n-1)n} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{pmatrix}.$$

Sie haben dafür

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots n(n-2) + (n+1)(n-1)$$

Additionen/Subtraktionen gebraucht. Das sind

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{n} (k+1)(k-1) && \text{Summenschreibweise} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \Big[k(k-1) + (k-1) \Big] && \text{Ausmultiplizieren der ersten Klammer} \\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) + \sum_{k=2}^{n} (k-1) && \text{Auflösen der eckigen Klammer} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + \sum_{k=2}^{n} (k-1) && \text{da } 1 \cdot (1-1) = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + \sum_{k=1}^{n-1} k && \text{Umnummerieren der Summanden} \\ &= \frac{1}{3} n(n^2-1) + \frac{1}{2} n(n-1) && \text{der Hinweis.} \end{aligned}$$

Um jetzt die Lösung $x_1, \dots, x_n$ zu erhalten müssen Sie rückwärts einsetzen. Sie erhalten $x_n = \tilde{b}_n / \tilde{a}_{nn}$ ohne Add./Sub. Für $x_{n-1} = (\tilde{b}_{n-1} - \tilde{a}_{(n-1)n} x_n) / \tilde{a}_{(n-1)(n-1)}$ brauchen Sie eine, für x_{n-2} zwei usw. Insgesamt sind das

$$1 + 2 + 3 + \dots n - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Für das gesamte Lösen des Gleichungssystems werden also

$$\frac{1}{3} n(n^2-1) + \frac{1}{2} n(n-1) + \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{3} n(n^2-1) + n(n-1)$$

Additionen und Subtraktionen benötigt.

b) Angenommen Sie können in einer Sekunde eine Addition/Subtraktion durchführen. Wieviele Jahre brauchen Sie, um ein Gleichungssystem mit $n = 1\,000$ zu lösen?
Lösung:

$$334\,332\,000\,\text{sec} \approx 10{,}6\,\text{Jahre}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Man betrachte ein Federpendel, dass in einer Flüssigkeit hängt. Solch ein Pendel gehorcht der Gleichung

$$my'' + ry' + ky = 0,$$

wobei m die Masse des Pendels, k die Federkonstante, und r der Reibungswiderstand der Flüssigkeit ist.

- Sei $k = 3\,g/s^2$ und $r = 4\,g/s$. Wie groß muss die Masse m sein, damit das Pendel Schwingungen ausführt?
  Lösung:
  Schwingungen erhält man genau dann, wenn die quadratische Gleichung $m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$ komplexwertige Lösungen hat. Dies ist genau dann der Fall wenn

  $$r^2 - 4mk < 0.$$

  Umformen ergibt

  $$r^2 - 4mk < 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 < 4mk \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r^2}{4k} < m.$$

  Dort kann jetzt die bekannten Werte für r und k einsetzen und erhält die Bedingung

  $$m > \frac{(4\,g/s)^2}{4(3\,g/s^2)} = \frac{4}{3}\,g.$$

- Sei k wie oben, $r = 0\,g/s$ und $m = 1{,}5\,g$. Zusätzlich gelte $y(0) = 0$. Wie groß ist dann die Schwingungsfrequenz des Pendels?
  Lösung:
  Wenn $r = 0$ ist erhält man das ungedämpfte Pendel mit der Gleichung

  $$my'' + ky = 0.$$

  Wie aus der Vorlesung/dem Skript bekannt hat diese Gleichung die allgemeine Lösung

  $$y = c_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + c_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

  für zwei reelle Konstanten c_1 und c_2. Mit der Zusatzbedingung $y(0) = 0$ kann man eine der beiden Konstanten eliminieren. Man erhält nämlich

  $$0 = y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1.$$

  Das kann nur gelten falls $c_2 = 0$ ist. Alle möglichen Lösungen haben also die Form

  $$y(t) = c_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

  Mithin beträgt die Schwingungsfrequenz des Pendels $\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3g/s^2}{1{,}5g}} = \sqrt{2}s^{-1}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie den Gradienten von

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{y} - xz}{e^{x^2+z^2}}.$$

Lösung:
Die Funktion ist ein Bruch. Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen von Zähler $\sqrt{y} - xz$ und Nenner $e^{x^2+z^2}$ separat.

- $\frac{\partial(\sqrt{y}-xz)}{\partial x} = -z$
- $\frac{\partial(\sqrt{y}-xz)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$
- $\frac{\partial(\sqrt{y}-xz)}{\partial z} = -x$
- $\frac{\partial(e^{x^2+z^2})}{\partial x} = 2xe^{x^2+z^2}$
- $\frac{\partial(e^{x^2+z^2})}{\partial y} = 0$
- $\frac{\partial(e^{x^2+z^2})}{\partial z} = 2ze^{x^2+z^2}$

Mit der Quotientenregel

$$\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h'g - hg'}{g^2}$$

erhält man dann

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-ze^{x^2+z^2} - (\sqrt{y}-xz)2xe^{x^2+z^2}}{(e^{x^2+z^2})^2} \\ \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (e^{x^2+z^2})}{(e^{x^2+z^2})^2} \\ \frac{-xe^{x^2+z^2} - (\sqrt{y}-xz)2ze^{x^2+z^2}}{(e^{x^2+z^2})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-z-2x(\sqrt{y}-xz)}{e^{x^2+z^2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{y}(e^{x^2+z^2})} \\ \frac{-x-2z(\sqrt{y}-xz)}{e^{x^2+z^2}} \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie den Gradienten von

$$g(x,y) = x^2 - y^2,$$

und finden Sie eine Nullstelle dieses Gradienten. Ist diese Nullstelle ein lokales Minimum von g? *Hinweis:* Betrachten Sie g eingeschränkt auf die Linie $x = 0$.

Lösung

- Gradient: $\nabla g(x,y) = (2x, -2y)$
- Nullstelle: $\nabla g(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = 0$.

Die Nullstelle $(0,0)$ ist kein Minimum von g. Denn auf der Linie $x = 0$ ist $g(x,y) = f(y) = -y^2$. Die Werte von $f(y)$ sind immer negativ, außer für $y = 0$, denn dann gilt $f(y) = f(0) = 0$. Also ist 0 ein Maximum von f, und somit kann $(0,0)$ kein Minimum von g sein.
Hinweis: für den Beweis, dass $(0,0)$ *keine Nullstelle ist gab es einen Zusatzpunkt.*

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Ein Student der Geowissenschaften muss eine Matheklausur schreiben, und dort genau 200 Punkte erlangen. In seiner unergründlichen Weisheit hat der Matheprofessor eine lange Liste von Aufgaben aufgestellt, aus denen sich der Student Aufgaben aussuchen kann. Es gibt genau drei Typen von Aufgaben: Textaufgaben, Rechenaufgaben und Beweisaufgaben. Jeder dieser Aufgabentypen bringt eine andere Anzahl von Punkten. Außerdem braucht die Bearbeitung der Aufgabentypen unterschiedlich viel Zeit. Schließlich kann die Matheklausur ohne den Konsum von Gummibärchen gelöst werden (s. Tabelle).

	Gummibärchen	Zeit [min]	Punkte
Rechenaufgaben	0	5/6	5
Textaufgaben	2	8	10
Beweisaufgaben	4	20	45

Wieviele Text-, Rechen- und Beweisaufgaben muss der Student lösen um genau die geforderten 200 Punkte zu erlangen, wenn er genau 90 min Zeit und 96 Gummibärchen verbrauchen will?

Lösung:

Hinweis: In dieser Aufgabe sind ein paar Zahlen falsch, deshalb ist sie nicht ganz so leicht zu rechnen wie ursprünglich geplant. Deshalb wurden Rechenfehler bei der Korrektur nicht berücksichtigt. Man beachte allerdings, dass die Aufgabe auch in ihrer gestellten Form durchaus lösbar ist.

In mathematischer Form verlangt die Aufgabe, dass lineare Gleichungssystem

$$2y + 4z = 96$$
$$\frac{5}{6}x + 8y + 20z = 90$$
$$5x + 10y + 45z = 200$$

zu lösen. In reduzierter Form schreibt sich das

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 96 \\ 5/6 & 8 & 20 & 90 \\ 5 & 10 & 45 & 200 \end{pmatrix}.$$

Darauf kann man die Gauss-Elimination anwenden. Vertausche zunächst die ersten beiden Zeilen

$$\begin{pmatrix} 5/6 & 8 & 20 & 90 \\ 0 & 2 & 4 & 96 \\ 5 & 10 & 45 & 200 \end{pmatrix}.$$

Multipliziere die erste Zeile mit 6, teile die zweite durch 2:

$$\begin{pmatrix} 5 & 48 & 120 & 540 \\ 0 & 1 & 2 & 48 \\ 5 & 10 & 45 & 200 \end{pmatrix}.$$

Ziehe die erste Zeile von der dritten ab:

$$\begin{pmatrix} 5 & 48 & 120 & 540 \\ 0 & 1 & 2 & 48 \\ 0 & -38 & -75 & -340 \end{pmatrix}.$$

Addiere die zweite Zeile 38-mal zur dritten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 5 & 48 & 120 & 540 \\ 0 & 1 & 2 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 1484 \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Zeile folgt $z = 1484$. Dies kann man in die zweite Zeile einsetzen und erhält

$$y + 2 \cdot 1484 = 48,$$

also $y = -2920$. Einsetzen der Werte für y und z in die erste Zeile ergibt

$$5x + 48 \cdot (-2920) + 120 \cdot 1484 = 540,$$

also

$$x = -7476.$$

Die mathematisch richtige, wenn auch im Rahmen der Textaufgabe etwas blödsinnige Lösung lautet: Der Student muss -7476 Rechenaufgaben, -2920 Textaufgaben, und 1484 Beweisaufgaben lösen.

Ende der Klausuraufgaben