Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei n eine natürliche Zahl, A eine $n \times n$-Matrix und λ eine reelle Zahl. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ heisst *Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ*, wenn er das Gleichungssystem

$$Ax = \lambda x$$

löst. Zeigen Sie:

1. Wenn $x \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha x \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.
2. Wenn sowohl $x \in \mathbb{R}^n$ als auch $y \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ sind, so ist auch $x + y$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Lösung 1

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gilt $Ax = \lambda x$. Zu zeigen ist

$$A(\alpha x) = \lambda(\alpha x).$$

Zuerst gilt

$$A(\alpha x) = \alpha A x,$$

denn

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha x_1 + a_{12}\alpha x_2 + \dots + a_{1n}\alpha x_n \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha x_1 + a_{n2}\alpha x_2 + \dots + a_{nn}\alpha x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ \vdots \\ \alpha(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha A x, \end{aligned}$$

(oder man verweist einfach auf das Skript). Dann benutzt man die Voraussetzung $Ax = \lambda x$ und erhält

$$A(\alpha x) = \alpha A x = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x).$$

2. Ähnlich wie oben zeigt man, dass $A(x + y) = Ax + Ay$ (oder man verweist nur auf das Skript, S. 73). Mit der Voraussetzung gilt dann

$$A(x + y) = Ax + Ay = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei n eine natürliche Zahl, und A und B zwei beliebige $n \times n$-Matrizen.

1. Wieviele Additionen brauchen Sie, um das Produkt AB auszurechnen?
2. Wieviele Multiplikationen brauchen Sie, um das Produkt AB auszurechnen?

Lösung 2
Das Produkt AB ist eine $n \times n$-Matrix, (d.h., eine Matrix mit n Zeilen und n Spalten). Insgesamt hat das Produkt also n^2 Einträge. Nach Definition des Produkts von Matrizen hat jeder dieser Einträge die Form

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Dies ist eine Summe mit n Summanden, und jeder dieser Summanden ist ein Produkt zweier Zahlen. Man braucht also n Multiplikationen und $n-1$ Additionen, um einen Eintrag auszurechnen. Bei n^2 Einträgen insgesamt braucht man also $n^2(n-1)$ Additionen und n^3 Multiplikationen für das gesamte Matrizenprodukt AB.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Man betrachte ein Federpendel, das in einer Flüssigkeit hängt. Die Auslenkung $y(t)$ eines solchen Pendels gehorcht der Gleichung

$$my'' + ry' + ky = 0,$$

wobei m die Masse des Pendels, k die Federkonstante, und r der Reibungswiderstand der Flüssigkeit ist.

1. Sei $k = 3\,g/s^2$ und $m = 4\,g$. Wie groß muss der Reibungswiderstand der Flüssigkeit r sein, damit das Pendel keine Schwingungen ausführt?

2. Sei k wie oben, $r = 0\,g/s$, und es gelte $y(0) = 0$. Wie groß muss die Masse des Pendels sein, damit die Schwingungsfrequenz genau ein Hertz (d.h. eine Schwingung pro Sekunde) beträgt?

Lösung 3

1. Wie aus der Vorlesung (und der ersten Klausur) bekannt, gibt es genau dann keine Schwingungen, wenn $m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$ keine komplexen Lösungen hat. Dies ist genau dann der Fall wenn
$$r^2 - 4mk \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 \geq 4mk \quad \Longleftrightarrow \quad |r| \geq \sqrt{4mk}.$$
Da der Reibungswiderstand r (aus physikalischen Gründen) positiv sein muss entfallen die Betragsstriche. Einsetzen der Zahlenwerte ergibt die Bedingung
$$r \geq \sqrt{4mk} \quad \Rightarrow r \geq \sqrt{4 \cdot 4g \cdot 3\frac{g}{s^2}} = 4\sqrt{3}\frac{g}{s}.$$

2. Mit $r = 0$ wird die Bewegungsgleichung zu
$$my'' + ky = 0.$$
Wie aus der Vorlesung bekannt ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung
$$y = c_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + c_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$
mit zwei unbekannten Konstanten c_1 und c_2. Mit der gegebenen Bedingung $y(0) = 0$ kann man die Konstante c_2 bestimmen, denn es gilt
$$y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_2 = 0.$$

Also haben alle Lösungen die Form

$$y(t) = c_1 \sin\Big(\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big).$$

Die Konstante c_1 lässt sich mit den angegebenen Informationen nicht bestimmen. Gefragt ist allerdings auch nur nach der Schwingungsfrequenz, und die ist unabhängig von c_1, nämlich $\omega = \sqrt{k/m}$ *in den Einheiten Bogenmaß pro Sekunde*. In Hertz, das heißt in Schwingungen pro Sekunde, ist die Frequenz dann $\tilde{\omega} = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}$. Um nun m so zu bestimmen dass $\tilde{\omega} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ rechnet man

$$m = \frac{k}{4\pi^2\tilde{\omega}^2} = \frac{3\frac{g}{s^2}}{4\pi^2 \cdot 1^2\frac{1}{s^2}} = \frac{3}{4\pi^2}g.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y} - xy}{\sin(x+y)}.$$

Lösung 4
Zum Lösen dieser Aufgabe ist die Quotientenregel

$$(\frac{g}{h})' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$$

wichtig.

Erste partielle Ableitungen: Da f ein Bruch ist leiten wir zuerst Zähler und Nenner separat ab. Für die Ableitungen nach x von Zähler und Nenner erhalten wir

$$\partial_x(\sqrt{y} - xy) = -y \qquad \text{und} \qquad \partial_x(\sin(x+y)) = \cos(x+y).$$

Für die Ableitungen nach y erhalten wir

$$\partial_y(\sqrt{y} - xy) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - x \qquad \text{und} \qquad \partial_y(\sin(x+y)) = \cos(x+y).$$

Also erhält man mit der Quotientenregel

$$\partial_x f(x,y) = \frac{-y\sin(x+y) - \sqrt{y}\cos(x+y) + xy\cos(x+y)}{\sin^2(x+y)}.$$

und

$$\partial_y f(x,y) = \frac{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\sin(x+y) - x\sin(x+y) - \sqrt{y}\cos(x+y) + xy\cos(x+y)}{\sin^2(x+y)}.$$

Zweite partielle Ableitungen:
Wir berechnen zuerst $\partial_{xx}f$ und $\partial_{xy}f$ als Ableitungen von $\partial_x f$.
Setze

$$h(x,y) := -y\sin(x+y) - \sqrt{y}\cos(x+y) + xy\cos(x+y).$$

Man erhält

$$\partial_x h(x,y) = -y\cos(x+y) + \sqrt{y}\sin(x+y) + y\cos(x+y) - xy\sin(x+y)$$
$$\partial_x h(x,y) = -y\cos(x+y) + \sqrt{y}\sin(x+y) + y\cos(x+y) - xy\sin(x+y)$$

und für den Nenner

$$\partial_x(\sin^2(x+y)) = \partial_y(\sin^2(x+y)) = 2\sin(x+y)\cos(x+y).$$

Zusammen erhält man

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial_x h(x,y)\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y)\cos(x+y)h(x,y)}{\sin^4(x+y)}.$$

und

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial_y h(x,y)\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y)\cos(x+y)h(x,y)}{\sin^4(x+y)}.$$

Dann berechnen wir $\partial_{yx} f$ und ∂_{yy} als Ableitungen von $\partial_y f$.
Setze

$$\tilde{h}(x,y) := (\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - x)\sin(x+y) - (\sqrt{y} + xy)\cos(x+y).$$

Die Ableitung davon nach y ist

$$\tilde{h}_y(x,y) = \frac{\cos(x+y)}{2\sqrt{y}} - \frac{\sin(x+y)}{4y\sqrt{y}} - x\cos(x+y) - \frac{\cos(x+y)}{2\sqrt{y}} + \sqrt{y}\sin(x+y) + x\cos(x+y) - xy\sin(x+y).$$

Mit der Quotientenregel erhält man daraus

$$f_{yy}(x,y) = \frac{1}{\sin^4(x+y)}\left[\tilde{h}_x(x,y)\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y)\cos(x+y)\tilde{h}(x,y)\right]$$
$$f_{yx}(x,y) = \frac{1}{\sin^4(x+y)}[\frac{\cos(x+y)}{2\sqrt{y}} - \sin(x+y) - x\cos(x+y) + \sqrt{y}\sin(x+y) + y\cos(x+y) - xy\sin(x+y)]$$

Dabei ist es streng genommen unnötig, f_{yx} direkt auszurechnen, denn wie aus der Vorlesung bekannt gilt $f_{yx} = f_{xy}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 63 \end{pmatrix}.$$

Lösung 5
Da oben links in der Matrix eine Null steht vertauschen wir zuerst die erste und die zweite Gleichung und erhalten

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 4 & 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 63 \end{pmatrix}.$$

Wir ziehen die erste Zeile zweimal von der dritten ab:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ -37 \end{pmatrix}.$$

Wir teilen die zweite Zeile durch 5:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ -37 \end{pmatrix}.$$

Wir ziehen die zweite Zeile viermal von der dritten ab:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ -57 \end{pmatrix}.$$

Jetzt haben wir die Matrix in Dreiecksform. Die letzte Gleichung ist jetzt $-19x_3 = -57$, also ist $x_3 = 3$. Einsetzen davon in die zweite Zeile ergibt die Gleichung $1 \cdot x_2 + 1 \cdot 3 = 5$, also ist $x_2 = 2$. Einsetzen von x_2 und x_3 in die erste Zeile ergibt

$$2 \cdot x_1 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 50.$$

Also ist $x_1 = 2$.