Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, J. Sánchez Cortés

4. Übung zur Vorlesung

# Mathematik für Geowissenschaftler II

SS 2012

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2012/Vorlesungen/Mathe_fuer_Geowissenschaftler_II.php

**Abgabe: 22. 5. 2012**

**1. Aufgabe** (4 Punkte)

a) Gegeben sei das folgende System von linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= x - z \\ y' &= x + y \\ z' &= -y + z. \end{aligned} \tag{1}$$

Konstruieren Sie eine Differentialgleichung dritter Ordnung für $z$, so dass die Lösungen von (1) auch Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung sind.

b) Gegeben sei folgende Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$ay''' - by'' + cy' + dy = 0.$$

Schreiben Sie diese Gleichung als System von Gleichungen erster Ordnung. Führen Sie dafür geschickt neue Variablen ein.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)
Mit dem folgenden Verfahren kann man Näherungslösungen für nichtlineare Differentialgleichungen bestimmen. Es heißt *explizites Euler-Verfahren.* In dieser Aufgabe soll das Euler-Verfahren auf das Räuber-Beute-Modell

$$\begin{aligned} R' &= -\alpha_1 R + \beta_1 BR \\ B' &= \alpha_2 B - \beta_2 BR \end{aligned}$$

(mit Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$) angewandt werden.
Das explizite Euler-Verfahren geht so: Angenommen Sie wissen die Werte für $R$ und $B$ zu einem Zeitpunkt $t$ (z.B. $t = 0$). Wählen Sie sich eine Zeitschrittweite $\tau$ und machen Sie dann folgende Schritte:

i) Approximieren Sie die Ableitungen $R'$ und $B'$ zur Zeit $t$ durch Differenzenquotienten

$$R'(t) \approx \frac{R(t+\tau) - R(t)}{\tau} \qquad B'(t) \approx \frac{B(t+\tau) - B(t)}{\tau}.$$

ii) Setzen Sie die Differenzenquotienten in die Gleichung ein

iii) Rechnen Sie dann $R(t+\tau)$ und $B(t+\tau)$ aus.

Um Werte für die Zeitpunkte $t+2\tau$, $t+3\tau$ etc. zu erhalten werden die drei Schritte ausreichend oft wiederholt.
Es seien $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, und $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Zur Zeit $t = 0$ Tage gebe es 100 Füchse und 160 Hasen, also $R(0) = 100, B(0) = 160$. Berechnen Sie mithilfe des Euler-Verfahrens die Anzahl der Füchse und Hasen nach zwei Tagen ($t = 2$), und zwar mit den Zeitschrittweiten

a) $\tau = 1$,

b) $\tau = 1/2$.

**3. Aufgabe** (4 Punkte)
Gegeben sei das Räuber-Beute-Modell nach Lotka & Volterra

$$\begin{aligned} R' &= -\alpha_1 R + \beta_1 BR \\ B' &= \alpha_2 B - \beta_2 BR \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Dabei stellt $R$ die Anzahl der Füchse und $B$ die Anzahl von Hasen in einem bestimmten Gebiet dar.
Das klassische Lotka-Volterra-Modell geht davon aus, dass immer unbegrenzte Mengen an Hasenfutter vorhanden sind. Das ist nicht immer gerechtfertigt. Erweitern Sie das Modell um eine dritte Gleichung für eine dritte Variable $F(t)$, die die Menge an verfügbarem Hasenfutter zur Zeit $t$ darstellt. Motivieren Sie Ihre Gleichung, und beschreiben Sie Ihre Annahmen.
*Hinweis:* Es gibt hier keine richtigen und falschen dritten Gleichungen. Entscheidend ist, dass Sie Ihre Wahl gut begründen können.