Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, J. Sánchez Cortés

6. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Geowissenschaftler II

SS 2012

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2012/Vorlesungen/Mathe_fuer_Geowissenschaftler_II.php

Abgabe: 6. 6. 2012

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) Es seien:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

und

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A\vec{a} + B\vec{b}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Sei D die Abbildung, die jeder Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$D(y) := y'' + y' + y$$

zuweist. Zeigen Sie, dass D linear ist.

b) Sei $[a, b]$ ein Intervall, und I die Abbildung, die jeder Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ den Wert ihres Integrals

$$I(y) := \int_a^b y \, dx$$

zuweist. Zeigen Sie, dass I linear ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Eine Menge X heißt *Vektorraum*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Man kann Elemente von X addieren, und es gilt
  i) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ für alle $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in X$,
  ii) es existiert ein Element $\vec{0} \in X$ so dass $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in X$,
  iii) für jedes Element $\vec{x} \in X$ existiert ein weiteres Element $\vec{a} \in X$, so dass $\vec{x} + \vec{a} = \vec{0}$.
- Man kann Elemente von X mit Zahlen aus $\mathbb{R}$ multiplizieren, und es gilt
  iv) $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Genaugenommen fehlen noch ein paar Bedingungen, aber diese hier sind die wichtigsten!)

Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome zweiten Grades (also alle Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$) einen Vektorraum bilden.