Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. C. Hartmann, S. Winkelmann

Klausur zur Vorlesung
Stochastik II im SoSe 2012

Name:__________________________________ Matr.-Nr.:____________________

Studiengang:
◯ Mathematik ◯ Bioinformatik ◯ Informatik ◯ anderer:

Angestrebter Abschluß:
◯ Diplom ◯ Lehramt(Staatsexamen) ◯ anderer:
◯ Bachelor(Mono) ◯ Bachelor(Kombi, Lehramt) ◯ Master

Beschriften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, mit Ihrem Namen. Bitte heften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, nach der Klausur mit einem der bereitgestellten Hefter zusammen. Bitte benutzen Sie keinen Bleistift. Erlaubte Hilfsmittel sind alle Ihre schriftlichen Unterlagen, Bücher und ein nicht programmierbarer Taschenrechner. Die Klausur besteht mit Deckblatt aus insgesamt drei Seiten auf zwei Blättern.

Wenn Sie Ihre Klausurergebnisse auf der Website der Vorlesung unter Ihrer Matrikelnummer nachlesen wollen, unterschreiben Sie bitte die folgende Erklärung:

Ich bin damit einverstanden, daß mein Ergebnis bei dieser Klausur unter meiner Matrikelnummer auf der Website zur Vorlesung veröffentlicht wird.

__________________________________ Unterschrift

Aufgabe	I	II.1	II.2	II.3	II.4	$\sum$
Punkte						

Viel Erfolg!

Teil I (10 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch angekreuzte Aussage erhalten Sie 0 Punkte. Falls Sie kein Kreuz setzen, gibt es einen halben Punkt.

wahr	falsch	Aussage
x		Fast sichere Konvergenz impliziert Konvergenz in Verteilung.
	x	Die Übergangsmatrix einer irreduziblen Markov-Kette hat nur echt positive Einträge.
x		Die bedingte Erwartung einer Zufallsvariablen ist wieder eine Zufallsvariable.
	x	Die momenterzeugende Funktion einer Zufallsvariablen ist wieder eine Zufallsvariable.
	x	Für einen transienten Zustand einer Markov-Kette ist die Rückkehrzeit fast sicher unendlich.
x		Gemeinsam normalverteilte Zufallsvariablen sind genau dann unabhängig, wenn sie unkorreliert sind.
	x	Die Verteilungsfunktion einer reellen Zufallsvariablen ist immer stetig.
x		Eine stochastische Matrix hat immer einen Eigenwert 1.
x		Die Potenzmenge einer Menge bildet stets eine σ-Algebra.
	x	Für zwei reelle Zufallsvariablen X, Y gilt stets $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Teil II finden Sie auf der Seite 3.

Teil II (25 Punkte)

Bearbeiten Sie **alle** der folgenden Aufgaben!

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Wir betrachten eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie die Markov-Kette für alle $\alpha \in [0,1]$ auf Irreduzibilität, Kommunikationsklassen, transiente und (positiv/Null-)rekurrente Zustände sowie Periodizität.
Für welche α hat die Kette eine stationäre Verteilung? Wie sieht sie aus? Ist sie eindeutig?

Lösung:
$\underline{0 < \alpha < 1}$: Alle Zustände liegen in einer Kommunikationsklasse $\{1,2,3\}$, denn der Prozess kommt von 1 nach 2, sowie von 2 nach 3 und von 3 nach 1 jeweils mit echt positiver Wahrscheinlichkeit. Damit ist der Prozess irreduzibel. Ausgehend von Zustand 3 kehrt man sicher in endlicher Zeit nach 3 zurück, denn es gilt: $\mathbb{P}_3(\tau_3 = 1) = 1 - \alpha$ und $\mathbb{P}_3(\tau_3 = 3) = \alpha$. D.h., 3 ist rekurrent. Da es sich um einen endlichen Zustandsraum handelt, sind damit alle Zustände positiv rekurrent. Es gibt keine Periodizität.
$\underline{\alpha = 0}$: Zustand 3 ist absorbierend und bildet daher für sich eine Kommunikationsklasse $\{3\}$. Die Zustände 1 und 2 liegen nach Definition jeweils mit sich selbst in einer Kommunikationsklasse: $\{1\}$ bzw. $\{2\}$. Der Zustand 3 ist positiv rekurrent (da er nie verlassen wird), während 1 und 2 transient sind (der Prozess wandert nach 3 und bleibt dort). Es gibt keine Periodizität.
$\underline{\alpha = 1}$: Alle Zustände liegen in einer Kommunikationsklasse $\{1,2,3\}$, d.h. der Prozess ist irreduzibel. Alle Zustände sind positiv rekurrent, denn es gilt $\mathbb{P}_x(\tau_x = 3) = 1$ für alle $x = 1,2,3$. Die Kette ist periodisch mit Periode 3, denn es gilt $p_{xx}^{(n)} = 1$ falls n ein Vielfaches von 3 ist, und $p_{xx}^{(n)} = 0$ sonst.
Die stationäre Verteilung ist in allen Fällen eindeutig und gegeben durch

$$\pi = \left(\frac{\alpha}{1+2\alpha}, \frac{\alpha}{1+2\alpha}, \frac{1}{1+2\alpha} \right).$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)
(vergleiche Aufg. 1 von ÜB 4) Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $f : \Omega \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass durch

$$\nu : \mathcal{E} \to [0,\infty], \quad E \mapsto \int_\Omega f \cdot \chi_E \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{E})$ definiert wird.

Es gilt

- Nulltreue: $\nu(\emptyset) = \int_\Omega f \cdot \chi_\emptyset \, d\mu = \int_\Omega 0 \, d\mu = 0$.
- Positivität: $\nu(A) = \int_A f \, d\mu \geq 0$ folgt aus $f \geq 0$ und der Monotonie des Integral.

- σ-Additivität: Für disjunkte A_n gilt

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \int_\Omega f\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\, d\mu \overset{(1)}{=} \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{A_n}\, d\mu$$
$$\overset{(2)}{=} \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \sum_{n=1}^{m} f\chi_{A_n}\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \nu(A_n),$$

  wobei in (1) genutzt wurde, dass die A_n disjunkt sind, und in (2) der Satz von der monotonen Konvergenz.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\frac{1}{n^2}$, d.h. $X_n \sim N\left(0, \frac{1}{n^2}\right)$. Man bestimme eine Zufallsvariable X, für die gilt:

$$X_n \xrightarrow{\text{i.V.}} X.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die charakteristische Funktion einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable durch $\varphi(s) = e^{is\mu - \sigma^2 s^2/2}$ gegeben ist.

Lösung:
Es gilt $X_n \xrightarrow{\text{i.V.}} X$ genau dann, wenn $\varphi_{X_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_X$ punktweise. Hier gilt

$$\varphi_{X_n}(s) = e^{-\frac{s^2}{2n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

für alle s. Die Funktion $\varphi_X(s) = 1$ ist die charakteristische Funktion der Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ (d.h. $\mathbb{P}_X = \delta_0$), denn

$$\varphi_X(s) = \mathbb{E}\left(e^{isX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx}\, d\delta_0 = 1 \cdot e^0 = 1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Der stochastische Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erfülle die Martingaleigenschaft

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} | \mathcal{F}_n\right) = X_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$. Zeigen Sie, dass auch

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} | \mathcal{F}_{n-1}\right) = X_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_{n-1}), \end{aligned}$$

wobei die ersten beiden Gleichungen direkt aus der Martingaleigenschaft folgen und die letzte, wegen $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$, aus der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung.

Ende der Klausuraufgaben