Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

10. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 26. Juni 2012, 12:15 Uhr

Aufgabe 1 (Charakterisierung von Markov-Ketten I, 4 Punkte)
Untersuchen Sie die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von den Parametern $0 \leq a, b \leq 1$ auf stationäre Verteilungen, Kommunikationsklassen sowie (positive) Rekurrenz und Transienz.

Aufgabe 2 (Committor Function, 4 Punkte)
Man betrachte einen symmetrischen Zufallsspaziergang auf $\mathbb{Z}$, d.h.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x+1 | X_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x-1 | X_n = x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

und zwei Teilmengen $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq a\}$ und $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq b\}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$. Es bezeichne $q_{A,B}$ die Committor Function

$$q_{A,B}(x) = \mathbb{P}_x(\tau_A < \tau_B),$$

wobei τ_A (bzw. τ_B) die Zeit des Eintritts in die Menge A (bzw. B) bezeichnet. Zeigen Sie, dass $q_{A,B}$ das folgende Gleichungssystem erfüllt.

$$\begin{aligned} (I-P)q_{A,B}(x) &= 0, \qquad x \in (A \cup B)^c \\ q_{A,B}(x) &= 1, \qquad x \in A \\ q_{A,B}(x) &= 0, \qquad x \in B. \end{aligned}$$

Dabei steht I für Identität und P für die Übergangsmatrix.

Aufgabe 3 (Charakterisierung von Markov-Ketten II, 4 Punkte)
Man betrachte einen Zufallsspaziergang auf $\mathbb{N}_0$ mit $\mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = 0) = p_k$, $0 \leq p_k \leq 1$, für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = 1$ für $k \geq 1$. Untersuchen Sie den Prozess in Abhängigkeit der Parameter p_k auf (positive) Rekurrenz und Transienz und bestimmen Sie die stationäre Verteilung (falls vorhanden).