Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

11. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 3. Juli 2012, 12:15 Uhr
Die Matlab-Dateien bitte per Mail an `klink@math.fu-berlin.de` schicken sowie ausdrucken und mit abgeben.

Achtung: Es gibt zwei Seiten!

Aufgabe 1 (Metropolis Monte Carlo, 6 Punkte)
Im folgenden soll ein Markov-Prozess mithilfe eines Metropolis-Monte-Carlo-Verfahrens simuliert werden. Als Zustandsraum betrachten wir eine Diskretisierung des Intervalls $[-2, 2]$ in 0.1er-Schritten, d.h.

$$S = \{-2, -1.9, -1.8, \ldots, 1.9, 2\}.$$

Die Dynamik des Prozesses sei über die Energiefunktion

$$E(x) = \left(x^2 - 1\right)^2 - 0.5x$$

definiert. Die Gleichgewichtsverteilung π des Prozesses ist gegeben durch

$$\pi(x) = \frac{e^{-E(x)}}{\sum_{y \in S} e^{-E(y)}}.$$

Das Verfahren hat die folgende Struktur:

- $k = 0$: Ein Startwert $X_0 \in S$ wird gewählt.
- $k \to k + 1$:
  1. Vorschlag: Gegeben ein Zustand $X_k = x \in S$, wähle zufällig einen Zustand $Y = y \in S$ gemäß einer Vorschlagsfunktion $q : S \times S \to [0, 1]$. Dabei ist $q(x, y) = \mathbb{P}(Y = y | X_k = x)$.
  2. Akzeptanz: Der vorgeschlagene Zustand y wird mit Wahrscheinlichkeit
  $$\min \left\{ 1 \, ; \, \frac{\pi(y)}{\pi(x)} \frac{q(y, x)}{q(x, y)} \right\}$$
  als neuer Zustand akzeptiert, so dass $X_{k+1} = y$ gesetzt wird. Andernfalls wird $X_{k+1} = X_k$ gesetzt, d.h. der Prozess verbleibt im gegebenen Zustand.

a) Plotten Sie E und π mithilfe von Matlab.

b) Simulieren Sie den Prozess für die Vorschlagsfunktion $q(x, y) = \frac{1}{|S|}$ $\forall x, y \in S$ (gleichverteilter Vorschlag) über $n = 1000$ und $n = 100\,000$ Schritte, plotten Sie jeweils das Histogramm und vergleichen Sie es mit den Bildern aus a).

c) Simulieren Sie den Prozess für die Vorschlagsfunktion $q(x, x+1) = q(x, x-1) = \frac{1}{2}$ $\forall x \in S \setminus \{2, -2\}$, $q(2, 1.9) = q(-2, -1.9) = 1$ (Nachbarschaftsvorschlag) über $n = 1000$ und $n = 100\,000$ Schritte, plotten Sie jeweils das Histogramm und vergleichen Sie es mit den Bildern aus a) und b).

Aufgabe 2 (Bedingte Erwartungen, 6 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine integrierbare Zufallsvariable und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ-Algebra.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ für $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{G} = \sigma(X)$.

b) Zeigen Sie: Es gilt $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.

c) Zeigen Sie: Für eine σ-Algebra $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ gilt $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ fast sicher. (Turmeigenschaft)