Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

1. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 24. April 2011, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (Borel-σ-Algebra, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass jedes der folgenden Mengensysteme ein Erzeuger der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^n &:= \{U \subset \mathbb{R}^n : \; U \,\text{offen}\} \\
\mathcal{C}^n &:= \{A \subset \mathbb{R}^n : \; A \,\text{abgeschlossen}\} \\
\mathcal{I}^n &:= \{(a,b] := (a_1,b_1] \times ... \times (a_n,b_n] : \; a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\} \\
\mathcal{I}^n_\infty &:= \{(-\infty,c] := (-\infty,c_1] \times ... \times (-\infty,c_n] : \; c_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe (Äußeres Maß, 4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein gegebener Maßraum. Definiere das äußere Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$ durch

$$\mu^*(B) := \inf_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset B} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

wobei $A_n \in \mathcal{F}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mu^*(A) = \mu(A) \; \forall A \in \mathcal{F}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass μ^* im Allgemeinen kein Maß ist. (Finden Sie ein Gegenbeispiel, dass die Kriterien eines Maßes verletzt.)

3. Aufgabe (Lebesgue-Maß, 4 Punkte)
Es sei $\lambda^n : \mathcal{B}^n \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Transformation. Zeigen Sie, dass λ^n invariant unter O ist, d.h., es gilt

$$\lambda^n(O(A)) = \lambda^n(A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}$. Dabei ist $O(A) := \{Ox : \; x \in A\}$.