Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

2. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe Mittwoch, 2. Mai 2012, zu Beginn der Übung

1. Aufgabe (Lebesgue-Maß, 4 Punkte)
Es bezeichne $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ die rationalen Zahlen aus dem Intervall $[0,1]$. Zeigen Sie, dass es kein Lebesgue-Maß auf Q gibt, d.h. ein Maß $\mu : 2^Q \to [0,\infty)$ mit $\mu(I_{a,b}) = b - a$ für alle $a, b \in Q$. Dabei ist $I_{a,b} := \{x \in Q : \ a \leq x \leq b\}$.

2. Aufgabe (Messbarkeit, 4 Punkte)
Es seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ zwei Messräume, wobei $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{E})$ von einem Mengensystem $\mathcal{E}$ erzeugt wird, und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega_2 : \ f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1\}$$

eine σ-Algebra auf Ω_2 bildet. Nutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass f genau dann $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$-messbar ist, wenn

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}_1$$

gilt.

3. Aufgabe (Lebesgue-Integral, 4 Punkte)
Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und $A, B \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie:

a) Falls $A \subset B$ und $f \geq 0$ fast überall auf B, dann gilt $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.

b) Falls $f \geq 0$ fast überall auf B und $\int_B f \, d\mu = 0$, dann $f = 0$ fast sicher auf B.