Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

3. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 8. Mai 2012, 12:15 Uhr

Aufgabe 1 (Konvergenzsätze, 4 Punkte)

a) Sei λ das Lebesgue-Maß. Finden Sie den Limes von $\int f_n d\lambda$ für $n \to \infty$, wobei

$$f_n(x) = \sin(nx)\log(1+x^n), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

b) Sei λ das Lebesgue-Maß. Finden Sie den Limes von $\int_\Omega f_n d\lambda$ für $n \to \infty$, wobei

$$f_n(x) = \frac{n \cdot \cos(x)}{1+n^2\sqrt{x}}, \quad x \in [0,1].$$

c) Sei $f_n > 0$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n \, d\mu \right).$$

Aufgabe 2 (Jensen-Ungleichung, 4 Punkte)
Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich des Maßes μ. Es gelte $\mu(\Omega) = 1$. Zeigen Sie mithilfe der Jensen-Ungleichung, dass für $0 < r < s$ die Lyapunov-Ungleichung gilt:

$$\left(\int |f|^r \, d\mu \right)^{1/r} \leq \left(\int |f|^s \, d\mu \right)^{1/s}.$$

Aufgabe 3 (Satz von Fubini, 4 Punkte)
Betrachte die Funktion

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & : \ 0 < y < x \\ -\frac{1}{y^2} & : \ 0 < x < y \\ 0 & : \ x = y, xy = 0. \end{cases}$$

Begründen Sie kurz, warum diese Funktion Borel-messbar (d.h. $\mathcal{B}([0,1]^2)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar) ist. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) d\lambda(x) d\lambda(y) \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) d\lambda(y) d\lambda(x)$$

und erklären Sie, warum dies nicht im Widerspruch zum Satz von Fubini steht.