

4. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 15. Mai 2012, 12:15 Uhr

Aufgabe 1 (Dichtefunktion, 4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ eine messbare Funktion.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\nu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty], \quad E \mapsto \int_{\Omega} f \cdot \chi_E d\mu = \int_E f d\mu$$

ein Maß auf (Ω, \mathcal{E}) definiert wird.

b) Was muss gelten, damit ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist?

Aufgabe 2 (Riemann-Stieltjes-Integral, 4 Punkte)

Es sei $X : (\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, gleichmäßig stetige Funktion. Das *Riemann-Stieltjes-Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x)$$

von g bezüglich F lässt sich definieren durch den Limes $N \rightarrow \infty$ von

$$\sum_{j=0}^N g(a_{j+1}^N) [F(a_{j+1}^N) - F(a_j^N)],$$

wobei $-\infty < a_0^N < a_1^N < \dots < a_N^N < a_{N+1}^N < \infty$ eine Partition des Intervalls $[a_0^N, a_{N+1}^N]$ ist und der Limes so gebildet wird, dass $a_0^N \rightarrow -\infty$ und $a_{N+1}^N \rightarrow \infty$ und $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{j=0, \dots, N} (a_{j+1}^N - a_j^N) = 0$ gilt.

a) Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) d\mathbb{P}_X(x).$$

b) Angenommen, F ist differenzierbar mit Dichtefunktion $f = F'$. Wie lassen sich die Integrale aus a) mithilfe der Dichtefunktion darstellen?

Aufgabe 3 (Charakteristische Funktion, 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable.

b) Zeigen Sie: Sind $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ mit charakteristischen Funktionen $\varphi_{X_1}, \dots, \varphi_{X_n}$ und $S = \sum_{i=1}^n X_i$, dann gilt

$$\varphi_S = \varphi_{X_1} \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}.$$

c) Seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch Bernoulli-verteilt zum Parameter $0 < p < 1$. Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von $S = \sum_{i=1}^n X_i$ mithilfe von b) und vergleichen Sie das Ergebnis mit der charakteristischen Funktion einer binomialverteilten Zufallsvariable.