Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

5. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 22. Mai 2012, 12:15 Uhr

Aufgabe 1 (Charakteristische Funktion und Momente, 4 Punkte)
Sei X eine reelle Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ. Man zeige:

a) Gilt $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, so ist φ stetig differenzierbar und es gilt $\varphi'(t) = \mathbb{E}(iXe^{itX})$ und damit insbesondere $\mathbb{E}(X) = -i\varphi'(0)$.

b) Die Umkehrung gilt nicht: φ kann differenzierbar sein, ohne dass das erste Moment existiert, d.h. es gilt $\mathbb{E}(|X|) = \infty$.

Hinweis: Sie können die folgende Ungleichung verwenden:

$$|e^{iy} - (1 + iy)| \le \min\left\{2|y|, \frac{1}{2}y^2\right\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (Charakteristische Funktion und Konvergenz, 4 Punkte)

a) Es sei X_n gleichverteilt auf $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Berechnen Sie die charakteristische Funktion φ_n von X_n sowie den Grenzwert $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$. Finden Sie eine Zufallsvariable X mit charakteristischer Funktion φ.

b) Für X_n und X aus a) bezeichne $\mathbb{P}_n$ das induzierte Maß von X_n und $\mathbb{P}$ das induzierte Maß von X. Prüfen Sie, ob $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}$ im schwachen und im starken Sinne gilt.

Aufgabe 3 (Unabhängigkeit, 4 Punkte)
Es seien X_1, X_2 zwei unabhängige, integrierbare reelle Zufallsvariable und f, g zwei messbare, integrierbare Funktionen. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini, dass

$$\mathbb{E}(f(X_1)g(X_2)) = \mathbb{E}(f(X_1))\mathbb{E}(g(X_2))$$

gilt.