Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

6. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 29. Mai 2012, 12:15 Uhr

Aufgabe 1 (Normalverteilung, 4 Punkte)

a) Die Zufallsvariable $X = (X_1, X_2)$ sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}^2$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei Σ symmetrisch positiv definit ist. Berechnen Sie die Randverteilung von X_1.

b) Zeigen Sie, dass zwei normalverteilte Zufallsvariable X_1, X_2 genau dann unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind, d.h., wenn $\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = 0$ gilt.

Definition: Momenterzeugende Funktion
Ist X eine reelle Zufallsvariable und $D := \{s \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[\exp(sX)] < \infty\}$, so heißt die Funktion

$$\begin{aligned} M : D &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \mathbb{E}[\exp(sX)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(sx)\, d\mathbb{P}_X(x) \end{aligned}$$

momenterzeugende Funktion von X.

Aufgabe 2 (Momenterzeugende Funktion I, 4 Punkte)

a) Analysieren Sie den Definitionsbereich von M. Betrachten Sie dabei positive und negative Zufallsvariable getrennt. Ist es möglich, dass $D = \emptyset$ gilt?

b) Man betrachte eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$ und Zähldichte

$$\mathbb{P}(X = n) = p_n := \frac{c}{n^2}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

wobei c so gewählt sei, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} p_n = 1$. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion M für X.

c) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion für eine normalverteilte Zufallsvariable.

Aufgabe 3 (Momenterzeugende Funktion II, 4 Punkte) Es sei X eine Zufallsvariable mit momenterzeugender Funktion $M : D \to \mathbb{R}$, wobei angenommen wird, dass $]-a, a[\subset D$ für ein $a > 0$ gilt.
Zeigen Sie:

a) Alle Momente $\mathbb{E}(X^n)$ sind endlich.

b) Es gilt

$$M(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}\mathbb{E}(X^n), \quad s \in]-a, a[.$$

c) Für die n-te Ableitung $M^{(n)}$ von M gilt

$$M^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n).$$