Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

7. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 5. Juni 2012, 12:15 Uhr
Die Matlab-Dateien bitte per Mail an `klink@math.fu-berlin.de` schicken sowie ausdrucken und mit abgeben.

Aufgabe 1 (Zentraler Grenzwertsatz, 12 Punkte)
Sei (X_n) eine Folge von iid Zufallsvariablen mit Wertebereich $\{-1, 1\}$. Es gelte $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} + \varepsilon$ und $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2} - \varepsilon$ für eine $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Setze $\mu := \mathbb{E}(X_1)$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$ und betrachte

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \mathbb{E}(X_k)}{\sqrt{n}}.$$

a) Berechnen Sie μ und σ^2 sowie die charakteristische Funktion und die momenterzeugende Funktion von X_1 und S_n.

b) Formulieren Sie eine Vermutung, wie der zentrale Grenzwertsatz hier aussieht. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

c) Entwerfen, implementieren und testen Sie ein Verfahren zur Berechnung von Realisierungen der Folge $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$. Verwenden Sie dieses Verfahren, um die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes für $\varepsilon = 0.1$ und $n = 100, 1.000, 10.000$ zu testen. Verwenden Sie dabei jeweils ca. $m = 10.000$ Realisierungen und plotten Sie die empirische Verteilung. Überlegen Sie sich, wie Sie den Abstand zwischen der behaupteten Normalverteilung und der empirisch beobachteten Verteilung messen können.

d) Wiederholen Sie c) für $\varepsilon = 0.45$ und $\varepsilon = 0.49$. Was beobachten Sie? Wie können Sie sich Ihre Beobachtung erklären?

Hinweis: Wenn Sie m Realisierungen $X(\omega_1), ..., X(\omega_m)$ einer Zufallsvariable X vorliegen haben, dann können Sie mit Hilfe der Funktion `hist` in MATLAB das zugehörige Histogramm zeichnen, welches Ihnen für ausreichend große m eine Approximation der Verteilung von X liefert.