Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

8. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 12. Juni 2012, 12:15 Uhr
Die Matlab-Dateien bitte per Mail an `klink@math.fu-berlin.de` schicken sowie ausdrucken und mit abgeben.

Achtung: Es gibt zwei Seiten!

Aufgabe 1 (Markov-Ketten, 6 Punkte)
Man betrachte einen Zufallsspaziergang auf $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, der bei den inneren Zuständen $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ mit Wahrscheinlichkeit p_+ $(0 < p_+ < 1)$ einen Schritt nach rechts und mit Wahrscheinlichkeit $p_- = 1 - p_+$ einen Schritt nach links macht, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) &= p_+, \quad i \in S \backslash \{-3, 3\} \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) &= p_-, \quad i \in S \backslash \{-3, 3\}. \end{aligned}$$

Für das Verhalten des Prozesses am Rand des Zustandsraumes unterscheide man drei Fälle:

1. Die Randzustände $\{-3, 3\}$ sind *absorbierend*, d.h. $\mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = i) = 1$ für $i \in \{-3, 3\}$.
2. Die Randzustände $\{-3, 3\}$ sind *reflektierend*, d.h. $\mathbb{P}(X_{n+1} = -2 | X_n = -3) = 1$ sowie $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 3) = 1$.
3. Der Zustandsraum ist *periodisch*, d.h. $\mathbb{P}(X_{n+1} = 3 | X_n = -3) = p_-$ und $\mathbb{P}(X_{n+1} = -2 | X_n = -3) = p_+$ sowie $\mathbb{P}(X_{n+1} = -3 | X_n = 3) = p_+$ und $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 3) = p_-$.

Aufgaben:

a) Stellen Sie für jeden der drei Fälle die Übergangsmatrix P auf.

b) Bestimmen Sie den Vektor $\pi_0 \in \mathbb{R}^{|S|}$ der Anfangsverteilung für

   (i) einen Start in Zustand $i = 0$ fast sicher und

   (ii) für einen gleichverteilten Start auf ganz S.

   Berechnen und plotten Sie (mithilfe von MATLAB) die Verteilungen $\pi_n = \pi_0^T P^n$ für $n = 1, 10, 100$ und alle Kombinationen von P und π_0. Wählen Sie dabei $p_+ = 0.7$.

c) Berechnen Sie für jede Variante von P die Gleichgewichtsverteilung μ der Markov-Kette als Linkseigenvektor von P zum Eigenwert 1, d.h. $\mu^T P = \mu^T$ (wieder mit MATLAB). Wählen Sie dabei erneut $p_+ = 0.7$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Verteilungen aus b).

Aufgabe 2 (Seltene Ereignisse, 6 Punkte)
Die Zufallsvariable X sei $N(0,1)$-verteilt. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit $p = \mathbb{P}(X \geq 5)$ mithilfe eines Monte-Carlo-Verfahrens zu schätzen, siehe Beispiel 2.53 im Skript. Die Schätzer

$$\hat{p} = \frac{1}{100\,000} \sum_{i=1}^{100\,000} \chi_{\{X_i \geq 5\}}$$

und

$$\hat{p}^{(100)} = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} \left(\frac{1}{100\,000} \sum_{i=1}^{100\,000} \chi_{\{X_i^{(j)} \geq 5\}} \right)$$

liefern keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Ein Verfahren zur Verbesserung des Schätzers wird im Skript auf Seite 44 (Beispiel 2.62) beschrieben und soll hier getestet werden. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor.

a) Gegeben die kumulantenerzeugende Funktion $\gamma(s) = \frac{s^2}{2}$ von X, bestimmen Sie die konvex konjugierte γ^* von γ.

b) Für feste Stichprobenzahl $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}$ die Verteilung für das Tupel $(X_1, ..., X_n)$ der unabhängigen Kopien von X. Wir verwenden die Schreibweise

$$d\mathbb{P} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{2} \right) dx.$$

Bestimmen Sie das neue Maß $\mathbb{P}_s$ gemäß der im Skript gegebenen Beschreibung. Optimieren Sie dabei auch über s, d.h. wählen Sie s so, dass die Varianz des Schätzers minimiert wird. Welche Verteilung erhalten Sie?

c) Schätzen Sie p nun mithilfe eines Monte-Carlo-Verfahrens (MATLAB), wobei Sie erneut die Schätzer $\hat{p}$ und $\hat{p}^{(100)}$ verwenden, jedoch die Werte $x_1, ..., x_{100\,000}$ jeweils mithilfe der neuen Verteilung $\mathbb{P}_s$ generieren. Verbessern sich die Ergebnisse?