Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

9. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2012

Abgabe bis Dienstag, 19. Juni 2012, 12:15 Uhr
Die Matlab-Dateien bitte per Mail an `klink@math.fu-berlin.de` schicken sowie ausdrucken und mit abgeben.

Aufgabe 1 (Darstellung von Markov-Ketten, 4 Punkte)
Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit Werten in $W \subset \mathbb{R}$ und $X_0 : \Omega \to S$ unabhängig von $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei ist S eine beliebige endliche Menge. Man betrachte eine Abbildung $f : S \times W \to S$ und definiere den stochastischen Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$X_{n+1} = f(X_n, \xi_n).$$

a) Begründen Sie: Der Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine homogene Markov-Kette auf S mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{xy} = \mathbb{P}\left(f(x,\xi_1) = y\right)$.

b) Finden Sie $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und f für den Zufallsspaziergang auf $S = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ von Übungsblatt 8 für absorbierende Randzustände.

Aufgabe 2 (Zufallsspaziergang auf $\mathbb{Z}$, 4 Punkte)
Man betrachte eine Markov-Kette auf $S = \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{array}{lll} p_{i,i+1} = 0.4 \quad \text{und} \quad p_{i,i-1} = 0.6 & & \text{für } i > 0, \\ p_{i,i+1} = 0.6 \quad \text{und} \quad p_{i,i-1} = 0.4 & & \text{für } i < 0, \\ p_{i,i+1} = 0.5 \quad \text{und} \quad p_{i,i-1} = 0.5 & & \text{für } i = 0. \end{array}$$

Dies ist eine Markov-Kette mit unendlichem Zustandsraum, wobei die 0 eine spezielle "Anziehungskraft" besitzt.

a) Simulieren Sie den Prozess mithilfe von MATLAB. Analysieren Sie dabei die Häufigkeiten der einzelnen Zustände, z.B. durch Ausgabe eines Histogramms.

b) Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung des Prozesses analytisch.

Aufgabe 3 (Die Markov-Eigenschaft, 4 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum S. Untersuchen Sie, für gegebene Teilmengen $A, B \subset S$ des Zustandsraums, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

a) $\mathbb{P}(X_2 \in B | X_1 = x_1, X_0 \in A) = \mathbb{P}(X_2 \in B | X_1 = x_1)$

b) $\mathbb{P}(X_2 \in B | X_1 \in A, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_2 \in B | X_1 \in A)$